Die Eulergerade

Begriffe

In einem Dreieck liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt U auf einer gemeinsamen Geraden, der *Euler-Geraden* (Bezeichnung: e).
Zur Erinnerung:

> Im Schwerpunkt eines Dreiecks S schneiden sich die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.
>
> Im Umkreismittelpunkt eines Dreiecks U schneiden sich die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks.
>
> Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Inkreismittelpunkt des Dreiecks (I). I liegt nur Ausnahmsweise auf der Euler-Gerade.

Nach der Definition macht es nur Sinn, von einer Euler-Geraden zu sprechen, wenn man sich auf ein Dreieck bezieht: Ohne Dreieck keine Euler-Gerade. Man kann den Sachverhalt auch anders beschreiben: Die „Eulereigenschaft“ beschreibt das Verhältnis von Dreieck und Gerade. Die Gerade, die durch Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks geht, ist die Euler-Gerade des Dreiecks.
Es wird sich im Weiteren als Zweckmäßig erweisen, folgende Sprachregelung zu treffen:

> Ist eine Gerade g gegeben und ist sie Euler-Gerade eines Dreiecks ABC, so nennt man das Dreieck Euler-Dreieck von g.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Begriff „Euler-Dreieck“ kein allgemeiner Begriff der Mathematik ist, sondern hier nur aus Bequemlichkeit verwendet wird.
Eine weitere Beobachtung gilt es festzuhalten: Während ein Dreieck genau eine Euler-Gerade hat, diese also eindeutig festgelegt ist, hat andersherum, wie wir sehen werden, jede Gerade unendlich viele Euler-Dreiecke.

Spezialfälle

In einem gleichseitigen Dreieck fallen die Punkte S, H, U (und auch I) in einem Punkt zusammen. Mathematiker müssen entscheiden, wie sie mit einem solchen Fall umgehen. Sollte jede Gerade, die durch diesen „Superpunkt“ geht eine Eulersche Gerade sein? Da in einem solchen Fall die Eulersche Gerade nicht eindeutig festgelegt wäre, und Uneindeutigkeit Mathematikern zuwider ist, hat man beschlossen, davon auszugehen, dass sich zu einem gleichseitigen Dreieck keine Eulersche Gerade finden lässt.

Konstruktion der Euler-Gerade

Gegeben sei das Dreieck ABC. ABC sei nicht gleichseitig.

1. Zeichne einen Kreis K_A um A mit einem Radius r, der sowohl die Hälfte der Seite b als auch die Hälfte der Seite c übersteigt.
2. Zeichne einen Kreis K_B um B mit Radius r. K_A und K_B schneiden sich in den Punkten P_B und Q_B.

3. Zeichne einen Kreis K_C um C mit Radius r. K_A und K_C schneiden sich in den Punkten P_C und Q_C.
4. Die Geraden P_BQ_B und P_CQ_C schneiden sich im Punkt U.
5. Die Gerade P_BQ_B schneidet die Seite c im Punkt M_c.
6. Die Gerade P_CQ_C schneidet die Seite b im Punkt M_b.
7. Die Geraden BM_b und CM_c schneiden sich im Punkt S.
8. Die Gerade SU ist die Eulersche Gerade e von ABC.

Ist diese Konstruktion immer möglich, solange ABC nicht gleichseitig ist? Können S und U in einem Punkt zusammenfallen? ¿¿¿

Euler-Gerade gegeben; Dreieck gesucht

Wie oben gezeigt, ist es nicht allzu kompliziert, zu einem gegebenen Dreieck die Euler-Gerade zu finden. Auf zunehmende Schwierigkeiten stößt man, wenn man umgekehrt zu einer gegebenen Gerade ein Euler-Dreieck finden soll[1].

Gleichschenklige Dreiecke

Gegeben sei eine Gerade e. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Euler-Gerade die Gerade e ist.

Die Lösung zeigt Abbildung 1: Man konstruiere das Dreieck ABC so, dass e die Symmetrieachse ist. Zum Beispiel:

1. Man wählt auf e einen Punkt A.
2. Man zeichnet eine Lotgerade g zu e.
3. Man zeichnet einen Kreis K um A mit ausreichend großem Radius.
4. K schneidet g in den Punkten B und C. ABC ist das gesuchte Dreieck.

Bei der Konstruktion ist darauf zu achten, dass Gerade g die Euler-Gerade nicht im Punkt A schneidet und dass das Dreieck ABC nicht gleichseitig ist.

Zeige: Die Dreiecke HM_aC, BF_cC, HF_cA, UM_cA und BM_aA sind einander ähnlich.

Beweise die Gültigkeit der Gleichung:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AU}} = 2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

[1] Dass dieses Problem nicht trivial ist, wird deutlich, wenn man bedenkt, dass es (in leicht veränderter Form) 1723 von der Berliner Akademie als Aufgabe gestellt wurde. Die spätere Lösung von Euler 1765 ist ein keineswegs einfaches Stück Mathematik (Lutstorf).

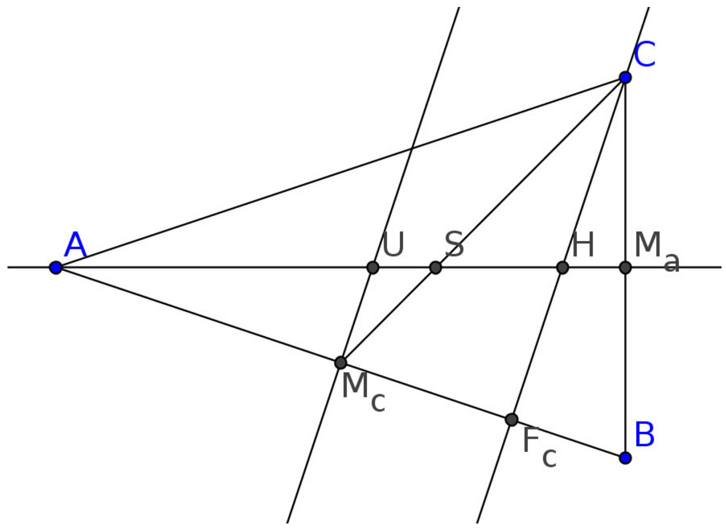


Abbildung 1: Beim gleichschenkligen Dreieck verläuft die Euler-Gerade (e) durch den Mittelpunkt der Basis (M_a) und dem der Basis gegenüberliegenden Eckpunkt (A). Die Mittelsenkrechte zu c schneidet die Euler-Gerade im Umkreismittelpunkt U. Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt zwischen e und CM_c. Der Schnitt zwischen e und der Höhengerade (CF_c) liefert den Höhenschnittpunkt H.

Rechtwinklige Dreiecke

Gegeben sei eine Gerade e. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Euler-Gerade die Gerade e ist.

Lösung (Jannis):

1. Wähle auf e den Punkt U.
2. Zeichne einen Kreis K um U.
3. Bezeichne einen der Schnittpunkte von K und e mit C
4. Zeichne eine Gerade g durch U, die nicht mit e übereinstimmt.
5. g schneidet K in den Punkten A und B.
6. ABC ist ein Euler-Dreieck zu e.

Man beobachtet, dass in dem Fall der Schwerpunkt S unabhängig ist von der Wahl von g.

Beweis: Nach einem Satz der Geometrie teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Die Strecke $\overline{UC}$ ist Seitenhalbierende der Seite $\overline{AB}$ (unabhängig von der Wahl von g). Damit ist die Lage von S festgelegt.

Normierungen

Um nicht zu viel Situationen betrachten zu müssen, versuchen wir gleichartige und ähnliche Situationen zusammenzufassen.
Wir beschränken uns daher im folgenden auf die Situation, dass e waagrecht ist und der Kreis K den Radius 1 hat.
Nach dieser Vorüberlegung betrachten wir die beiden oben untersuchten Fälle. Dazu legen wir einen Eckpunkt des Dreiecks (A) in einen der Schnittpunkte zwischen K und e.

Gleichschenklige Dreiecke: Ein gleichschenkliges Euler-Dreieck lässt sich nun wie folgt konstruieren:

1. Wähle einen Punkt P auf e, der innerhalb des Kreises K liegt.
2. Konstruiere eine Senkrechte h zu e durch den Punkt M.
3. h schneidet K in den Punkten B und C.
4. Das Dreieck ABC ist ein gleichschenkliges Euler-Dreieck zu e

Rechtwinklige Dreiecke: Mit der folgenden Anleitung lässt sich ein rechtwinkliges Euler-Dreieck konstruieren.

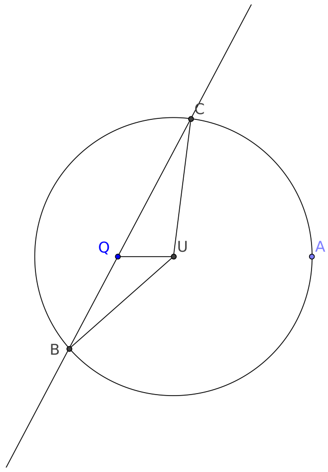
1. Wähle eine (von e verschiedene) Gerade g durch den Mittelpunkt von K.
2. g schneidet K in den Punkten B und C.
3. Das Dreieck ABC ist ein rechtwinkliges Euler-Dreieck zu e.

Belässt man den Punkt A auf dem Schnitt zwischen der Geraden e und dem Kreis K gibt es kein Euler-Dreieck, das sich nicht nach einer der oben angeführten Verfahren konstruieren lässt.

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Lage von Gerade e, von K und von Punkt A festgelegt. Da e die Eulergerade ist, muss auf ihr der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden S liegen. Insbesondere der Seitenhalbierenden der Seite a, die wir s_a nennen wollen. Da $s \in e$ und $A \in e$, liegt s_a vollständig auf e.
Wir geben dem Schnittpunkt von s_a und a den Namen Q. Q liegt auf e (wegen $s_a \subset e$). Da s_a Seitenhalbierende von a ist, muss gelten: $|BQ| = |CQ|$. Es sind also (für ein vorgegebenes Q) auf K alle Punktkombinationen B und C zu finden, für die gilt: Q halbiert die Verbindungsstrecke $\overline{BC}$.

Fall 1: Fällt Q mit dem Kreismittelpunkt zusammen, so liegt Q genau dann auf der Verbindungsstrecke $\overline{BC}$, wenn $\overline{BC}$ Durchmesser von K ist. In diesem Fall ist $|BQ| = |CQ| = r_K = 1$. Man kann den Satz von Thales anwenden und zeigt, dass in diesem Fall Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Fall 2: Q liegt nicht im Kreismittelpunkt, aber im Inneren des Kreises. B liegt irgendwo auf K, C liegt auf dem Schnittpunkt von K und der Geraden BQ (siehe Abbildung). Wir betrachten die Dreiecke UBQ und UCQ. Diese stimmen überein in (1) der Seite $\overline{UQ}$, (2) den Streckenlängen $|BU| = |CU| = r_K = 1$ und (3) nach Voraussetzung den Streckenlängen $|BQ| = |CQ|$.
Nach Kongruenzsatz SSS sind die Dreiecke also kongruent. Da dann die einander entsprechenden Winkel gleichgroß sein müssen gilt: $\angle UQC = \angle BQU$. Da diese Winkel Nebenwinkel sind, folgt $\angle UQC = \angle BQU = 90°$.
Damit ist ABC über das unter *gleichschenklige Dreiecke* beschriebene Schema zu konstruieren.



Fall 3: Q liegt nicht im Kreismittelpunkt und nicht im Inneren des Kreises. In diesem Fall liegt Q nicht auf der Strecke $\overline{BC}$.

Lutstorf: Lutstorf, Heinz Theo. Die Euler-Gerade und ihre ursprüngliche Herleitung. Betrachtungen zu Eulers Urtext. Selbstverlag (2012).
http://dx.doi.org/10.3929/ethz-a-007579209