Die Eulergerade – Part 2

2.2020	Benno, Osama, Jonas, Rune

Begriffe

In einem Dreieck liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt U auf einer gemeinsamen Geraden, der *Euler-Geraden* (Bezeichnung: e).
Zur Erinnerung:

> Im Schwerpunkt eines Dreiecks S schneiden sich die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.
>
> Im Umkreismittelpunkt eines Dreiecks U schneiden sich die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks.
>
> Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Inkreismittelpunkt des Dreiecks (I). I liegt nur Ausnahmsweise auf der Euler-Gerade.

Nach der Definition macht es nur Sinn, von einer Euler-Geraden zu sprechen, wenn man sich auf ein Dreieck bezieht: Ohne Dreieck keine Euler-Gerade. Man kann den Sachverhalt auch anders beschreiben: Die „Eulereigenschaft" beschreibt das Verhältnis von Dreieck und Gerade. Die Gerade, die durch Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks geht, ist die Euler-Gerade des Dreiecks.
Es wird sich im Weiteren als Zweckmäßig erweisen, folgende Sprachregelung zu treffen:

> Ist eine Gerade g gegeben und ist sie Euler-Gerade eines Dreiecks ABC, so nennt man das Dreieck Euler-Dreieck von g.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Begriff „Euler-Dreieck" kein allgemeiner Begriff der Mathematik ist, sondern hier nur aus Bequemlichkeit verwendet wird.
Eine weitere Beobachtung gilt es festzuhalten: Während ein Dreieck genau eine Euler-Gerade hat, diese also eindeutig festgelegt ist, hat andersherum, wie wir sehen werden, jede Gerade unendlich viele Euler-Dreiecke.

Normierungen

Eine wesentliche Schwierigkeit, wenn man den Zusammenhang zwischen Dreiecken und ihren Euler-Geraden untersucht, ist, dass es so viele unterschiedliche Dreiecke gibt. Eine zentrale Aufgabe der Mathematik besteht darin, eine unübersichtliche Menge von Situationen auf wenige wesentliche Fälle zu komprimieren. Häufig erreicht man dies durch Normierung. Eine solche Normierung wollen wir hier durchführen:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck in der Koordinatenebene. Wir führen folgenden Transformationen durch:

Verschiebung: Wir verschieben das Dreieck so, dass sein Umkreismittelpunkt auf dem Nullpunkt zu liegen kommt.

Drehung: Wir drehen das Dreieck um den Nullpunkt, so dass die Seite c des Dreiecks parallel zu x-Achse verläuft. Falls das Dreieck spitzwinklig ist, soll c unterhalb der x-Achse verlaufen, ist es stumpfwinklig, so befindet sich c oberhalb der x-Achse. Diese Orientierung führen in jedem Fall dazu, dass der Punkt C eine positive y-Koordinate hat, also oberhalb der x-Achse liegt.

Durch die beiden Transformationen haben sich Größe und Form des Dreiecks nicht verändert. Das transfornmierte Dreieck ist zum ursprünglichen Dreieck kongruent. Im Wesentlichen bleiben wir in unserer Untersuchung also vollkommen allgemein.
Wir werden aber eine weitere Transformation durchführen, die die Form des Dreiecks verändern wird.

Streckung / Stauchung: Wir führen eine zentrische Streckung (Streckzentrum $U(0|0)$) durch, so dass ein Dreieck mit Umkreisradius 1 entsteht.

Das nun vorliegende Dreieck ist eine Vergrößerung oder Verkleinerung des ursprünglichen Dreiecks. Es ist diesem also ähnlich.

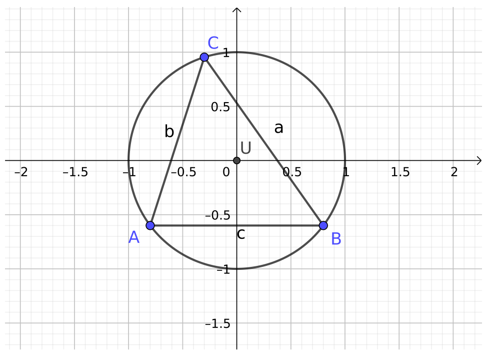
Gleichung der Euler-Geraden

Wir betrachten nun die Situation:
Das Dreieck ist festgelegt durch die Punkte $A(x_A|y_A), B(x_B|y_B)$ und $C(x_C|y_C)$. Aufgrund der obigen Transformationen kann man schließen:

$$x_A = -x_B$$

$$y_A = y_B = \pm\sqrt{1 - x_A^2}$$

$$y_C = \sqrt{1 - x_C^2}$$



Bemerkungen: Als Vorzeichen von y_A und y_B ergeben sich bei spitzwinkligen Dreiecken jeweils ein Minus, bei stumpfwinkligen Dreiecken steht ein plus.
Durch die Transformationen ist die Situation allein durch die Werte von x_A und x_C bestimmt.

Die Koordinaten des Schwerpunkts: Bevor wir die Koordinaten des Schwerpunkts S bestimmen, halten wir noch einmal fest, dass wir die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U kennen. Wegen der Transformationen gilt:

$$U(0|0)$$

Die Lage des Schwerpunkts ließe sich dadurch ermitteln, dass man zwei Seitenhalbierende bestimmt und deren Schnittpunkt berechnet. Wir schlagen aber einen anderen Weg ein:
Die Seitenhalbierende s_c ist die Strecke zwischen den Punkten C und F, wobei F als Mittelpunkt zwischen A und B die Koordinaten $F(0|y_A)$ hat. Da der Schwerpunkt $S(x_S|y_S)$ die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 teilt, erhält man:

$$x_S = \frac{2x_F + x_C}{3} = \frac{x_C}{3} \qquad y_S = \frac{2y_F + y_C}{3} = \frac{\pm 2\sqrt{1 - x_A^2} + \sqrt{1 - x_C^2}}{3}$$

Also erhält man für den Schwerpunkt des Dreiecks die Koordinaten:

$$S\left(\frac{x_C}{3}\middle|\frac{2y_A+y_C}{3}\right)$$

Bei Bedarf kann man die y-Koordinaten mit Hilfe der oben angeführten Formeln ersetzen:

$$y_A = \pm\sqrt{1-x_A^2} \qquad\qquad y_C = \sqrt{1-x_C^2}$$

Die Gleichung der Euler-Geraden: Mit U und S haben wir zwei Punkte der Euler-Geraden und können aus ihnen die Gleichung der Euler-Gerade herleiten. Diese geht durch U also den Nullpunkt, daher ist ihr y-Achsenabschnitt 0. Die Steigung erhält man über ein Steigungsdreieck. Man rechnet:

$$m = \frac{y_S - y_U}{x_S - x_U} = \frac{2y_A + y_C}{x_C}$$

Der Bruch ist nicht definiert, falls $x_S = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit Basisseite c ist. In diesem Fall ist entweder die Euler-Gerade nicht definiert (gleichseitiges Dreieck) oder die Euler-Gerade fällt mit der y-Achse zusammen.
Sind die Seiten a und b nicht gleichlang, so hat die Euler-Gerade die Gleichung:

$$e(x) = \frac{2y_A + y_C}{x_C} \cdot x$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts der Höhengeraden: Für den noch fehlenden Punkt H, der ebenfalls auf der Euler-Geraden liegt, stellen wir zunächst fest, dass die Höhengerade h_C durch die Gerade mit

$$x = x_C$$

festgelegt ist. h_C ist also die Parallele zur y-Achse durch den Punkt C. Wir bringen diese Gerade zum Schnitt mit der Euler-Geraden e und erhalten:

$$H\left(x_C\middle|2y_A + y_C\right)$$

Wir erkennen, dass der Schwerpunkt S die Strecke $\overline{HU}$ im Verhältnis 2:1 teilt.