Fibonacci-Zahlen

Schon vor 2000 Jahren befassten sich die Inder mit einer Zahlenfolge, die im modernen Europa auf den mittelalterlichen Gelehrten Leonardo Fibonacci aus Pisa zurückgeführt wird.

Die nach Fibonacci benannten Zahlen können wie folgt bestimmt werden:

- Die erste Fibonacci-Zahl ist 1. ($f_1 = 1$)
- Die zweite Fibonacci-Zahl ist ebenfalls 1.[1] ($f_2 = 1$)
- Jede weitere Fibonacci-Zahl wird berechnet, indem man die beiden Fibonacci-Zahlen, die ihr vorausgehen, addiert. ($f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$)

Man erhält so:

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & +1 & & & & & & & & 2\\
 & 1 & +2 & & & & & & & 3\\
 & & 2 & +3 & & & & & & 5\\
 & & & 3 & +5 & & & & & 8\\
 & & & & 5 & +8 & & & & 13\\
 & & & & & 8 & +13 & & & 21\\
 & & & & & & 13 & +21 & & 34\\
 & & & & & & & 21 & +34 & 55\\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Die ersten 12 Fibonacci-Zahlen sind:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibonacci-Zahl:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Die Nummer einer Fibonacci-Zahl (obere Zeile in der Tabelle) werden wir im Folgenden *Ordinalzahl* der Fibonacci-Zahl nennen.

Mehr zu den Zahlen des Fibonacci kann man hier nachlesen.

Jannis fiel auf, dass jede fünfte Fibonacci-Zahl durch fünf teilbar ist. Er hat die Fibonacci-Folge weit verfolgt und stieß auf keine Ausnahmen dieser Regel.

Tatsächlich kann man die Richtigkeit der Beobachtung beweisen. Dazu nehmen wir an, dass es zumindest eine Fibonacci-Zahl gibt, die durch 5 teilbar ist[2]. Wir könnten diese Zahl k nennen und festhalten, dass k durch 5 teilbar ist. Übersichtlicher wird es aber, wenn wir die Zahl nicht k nennen, sondern $5 \cdot n$ und im Hinterkopf behalten, dass n eine natürliche Zahl ist.

Wir wollen nun den Nachfolger von $5 \cdot n$ bestimmen. Das ist nicht ohne weiteres möglich, denn wir brauchen, um diesen zu bestimmen auch den Vorgänger von $5 \cdot n$. Da wir dessen Wert nicht kennen, nennen wir ihn einfach m (m ist dabei eine unbekannte natürliche Zahl). Nun können

[1] Alternativ zu dieser Initialisierung gibt man manchmal vor: Die nullte Fibonacci-Zahl ist 0, die erste Fibonacci-Zahl ist 1.

[2] Diese Zahl könnte zum Beispiel die 5 sein, von der wir ja tatsächlich wissen, dass sie als sechste Fibonacci-Zahl auftritt. Hier bleiben wir aber im Allgemeinen.

1.	$1 =$	1
2.	$1 =$	1
3.	$2 =$	2
4.	$3 =$	3
5.	$5 =$	5
6.	$8 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2$
7.	$13 =$	13
8.	$21 =$	$3 \cdot 7$
9.	$34 =$	$2 \cdot 17$
10.	$55 =$	$5 \cdot 11$
11.	$89 =$	89
12.	$144 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
13.	$233 =$	233
14.	$377 =$	$13 \cdot 29$
15.	$610 =$	$2 \cdot 5 \cdot 61$
16.	$987 =$	$3 \cdot 7 \cdot 47$
17.	$1597 =$	1597
18.	$2584 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 19$
19.	$4181 =$	$37 \cdot 113$
20.	$6765 =$	$3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 41$
21.	$10\,946 =$	$2 \cdot 13 \cdot 421$
22.	$17\,711 =$	$89 \cdot 199$
23.	$28\,657 =$	$28\,657$
24.	$46\,368 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$
25.	$75\,025 =$	$5 \cdot 5 \cdot 3001$
26.	$121\,393 =$	$233 \cdot 521$
27.	$196\,418 =$	$2 \cdot 17 \cdot 53 \cdot 109$
28.	$317\,811 =$	$3 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 281$
29.	$514\,229 =$	$514\,229$
30.	$832\,040 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 61$
31.	$1\,346\,269 =$	$557 \cdot 2417$
32.	$2\,178\,309 =$	$3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 2207$
33.	$3\,524\,578 =$	$2 \cdot 89 \cdot 19\,801$
34.	$5\,702\,887 =$	$1597 \cdot 3571$
35.	$9\,227\,465 =$	$5 \cdot 13 \cdot 141\,961$
36.	$14\,930\,352 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107$
37.	$24\,157\,817 =$	$73 \cdot 149 \cdot 2221$
38.	$39\,088\,169 =$	$37 \cdot 113 \cdot 9349$
39.	$63\,245\,986 =$	$2 \cdot 233 \cdot 135\,721$
40.	$102\,334\,155 =$	$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 2161$
41.	$165\ 580\,141 =$	$2789 \cdot 59\,369$
42.	$267\,914\,296 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 211 \cdot 421$
43.	$433\,494\,437 =$	$433\,494\,437$
44.	$701\,408\,733 =$	$3 \cdot 43 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 307$
45.	$1\,134\,903\,170 =$	$2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 61 \cdot 109\,441$
46.	$1\,836\,311\,903 =$	$139 \cdot 461 \cdot 28\,657$
47.	$2\,971\,215\,073 =$	$2\,971\,215\,073$
48.	$4\,807\,526\,976 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 1103$
49.	$7\,778\,742\,049 =$	$13 \cdot 97 \cdot 6\,168\,709$
50.	$12\,586\,269\,025 =$	$5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 151 \cdot 3001$
51.	$20\,365\,011\,074 =$	$2 \cdot 1597 \cdot 6\,376\,021$
52.	$32\,951\,280\,099 =$	$3 \cdot 233 \cdot 521 \cdot 90\,481$
53.	$53\,316\,291\,173 =$	$953 \cdot 55\,945\,741$
54.	$86\,267\,571\,272 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 109 \cdot 5779$
55.	$139\,583\,862\,445 =$	$5 \cdot 89 \cdot 661 \cdot 474\,541$
56.	$225\,851\,433\,717 =$	$3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 281 \cdot 14\,503$
57.	$365\,435\,296\,162 =$	$2 \cdot 37 \cdot 113 \cdot 797 \cdot 54\,833$
58.	$591\,286\,729\,879 =$	$59 \cdot 19\,489 \cdot 514\,229$
59.	$956\,722\,026\,041 =$	$353 \cdot 2\,710\,260\,697$
60.	$1\,548\,008\,755\,920 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 2521$
61.	$2\,504\,730\,781\,961 =$	$4513 \cdot 555\,003\,497$
62.	$4\,052\,739\,537\,881 =$	$557 \cdot 2417 \cdot 3\,010\,349$
63.	$6\,557\,470\,319\,842 =$	$2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 421 \cdot 35\,239\,681$
64.	$10\,610\,209\,857\,723 =$	$3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 1087 \cdot 2207 \cdot 4481$
65.	$17\,167\,680\,177\,565 =$	$5 \cdot 233 \cdot 14\,736\,206\,161$
66.	$27\,777\,890\,035\,288 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 9901 \cdot 19\,801$
67.	$44\,945\,570\,212\,853 =$	$269 \cdot 116\,849 \cdot 1\,429\,913$

wir die Nachfolger von $5 \cdot n$ berechnen:

$$\begin{array}{rr} m & \\ & 5 \cdot n \\ m & + 5 \cdot n \\ m & + 10 \cdot n \\ 2 \cdot m & + 15 \cdot n \\ 3 \cdot m & + 25 \cdot n \\ 5 \cdot m & + 40 \cdot n \end{array}$$

Die letzte hier notierte Fibonacci-Zahl ist der fünfte Nachfolger von $5 \cdot n$ und er ist tatsächlich durch 5 teilbar.
Warum? Um das zu erkennen formt man den Wert der Fibonacci-Zahl durch Ausklammern um:

$$5 \cdot m + 40 \cdot n = 5 \cdot (m + 8 \cdot n)$$

Wenn ich also die betrachtete Fibonacci-Zahl durch 5 teile, so erhalte ich das Ergebnis $m+8 \cdot n$. Dieses Ergebnis ist eine natürliche Zahl (da m und n natürlich sind) und damit ist $5 \cdot m + 40 \cdot n$ durch 5 teilbar.

Allgemein ist dadurch gezeigt: Ist eine Fibonacci-Zahl durch 5 teilbar, so ist auch ihr fünfter Nachfolger durch 5 teilbar.

Die Fibonacci-Zahl 5 steht also als erste Zahl in einer Reihe durch 5 teilbarer Fibonacci-Zahlen: $5, 55, 610, 6765, 75025, 832040, 9227465, \ldots$

Aufgabe 1: Versuche eine Formel zu finden, nach der man die nächsten Zahlen dieser Folge bestimmen kann.

Ähnliche Regeln für die Teilbarkeit von Fibonacci-Folgen sind schnell gefunden. Es gilt:

Ist eine Fibonacci-Zahl durch	2	teilbar, so ist auch ihr	3.	Nachfolger durch	2	teilbar.
Ist eine Fibonacci-Zahl durch	3	teilbar, so ist auch ihr	4.	Nachfolger durch	3	teilbar.
Ist eine Fibonacci-Zahl durch	5	teilbar, so ist auch ihr	5.	Nachfolger durch	5	teilbar.
Ist eine Fibonacci-Zahl durch	8	teilbar, so ist auch ihr	6.	Nachfolger durch	8	teilbar.
Ist eine Fibonacci-Zahl durch	13	teilbar, so ist auch ihr	7.	Nachfolger durch	13	teilbar.

Aufgabe 2: Finde die nächsten drei Fibonacci-Teilbarkeitsregeln. Führe für eine dieser Regeln einen Beweis.

Eine interessante Frage, deren Antwort ich nicht kenne, ist die, ob sich alle durch 5 teilbaren Fibonacci-Zahlen durch die Nachfolge-Regel gewinnen lassen, oder ob irgendwann eine Fibonacci-Zahl auftaucht, die durch 5 teilbar, aber kein $5 \cdot m$-Nachfolger der 5 ist. Ich vermute aber, dass von der 5 ausgehend jede fünfte Fibonacci-Zahl durch 5 teilbar ist und sonst keine.

Nach meiner Einschätzung gilt diese Aussage auch für die Teilbarkeit durch andere Fibonacci-Zahlen.

Für den Spezialfall 2 lässt sich das beweisen. Dazu schauen wir noch einmal auf die Teilbarkeitsregel:

Ist eine Fibonacci-Zahl durch 2 teilbar, so ist auch ihr 3. Nachfolger durch 2 teilbar.

Mit 2 sind also auch $8, 34, 144, \ldots$ durch 2 teilbar. Zwischen diesen geraden Fibonacci-Zahlen liegen – zumindest in diesem Bereich – genau zwei ungerade Fibonacci-Zahlen. Wir werden beweisen, dass dies immer so ist.

Nehmen wir dazu an, wir hätten die Fibonacci-Folge sehr weit bis zu einer geraden Zahl verfolgt und es wäre bislang immer die reguläre Abfolge $g - u - u - g$ (g steht für gerade, u für ungerade) aufgetreten. Wenn wir nun von unserer geraden Zahl den Nachfolger bilden, so ist dieser ungerade (denn nach unserem regulären Muster war der Vorgänger der geraden Zahl ungerade). Dessen Nachfolger ist jedoch ebenfalls ungerade, da er sich aus der Summe einer geraden und einer ungerade Fibonacci-Zahl ergibt. Nachdem ich also zwei ungerade Nachfolger erhalten habe, muss der dritte Nachfolger wieder gerade sein. Das Muster $g - u - u - g$ ist also reproduziert. Es würde sich weiter und weiter fortsetzen und keine Abweichung dulden.

Versuchen wir diese Art der Untersuchung zu systematisieren. Dazu betrachten wir, welche Reste entstehen, wenn wir eine Fibonacci-Zahl n, durch eine Fibonacci-Zahl m teilen.

$n \rightarrow$	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
$m = 2$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$m = 3$	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1
$m = 5$	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2	0	2	2	4
$m = 8$	2	3	5	0	5	5	2	7	1	0	1	1	2	3	5	0

Wie man für die Teilbarkeit durch 3 erkennt und für die anderen Fibonacci-Zahlen bereits zu erahnen beginnt, werden die Teilerrestsequenzen zwar komplizierter, aber eine Wiederholungsregel gibt es auf jeden Fall.

2: 0,1,1,0
3: 0,2,2,1,0,1,1,2,0
5: 0,3,3,1,4,0,4,4,3,2,0,2,2,4,1,0,1,1,2,3,0
8: 0,5,5,2,7,1,0,1,1,2,3,5,0

> **Aufgabe 3:** Häufig wird das Fibonacci-Prinzip verallgemeinert, indem man statt von den Zahlen 0 und 1 von anderen Startwerten ausgeht. Für solche Folgen gilt die 5er-Teilbarkeitsregel nicht immer. Finde zwei Folgen für die jeweils andere Regeln gelten.

Schauen wir uns nun den 5er-Zyklus genauer an. Wir können ihn in Fünfergruppen unterteilen:

03314 04432 02241 01123

Jede Fünfergruppe beginnt (nach der 0) mit einem anderen Teilerrest. Da bei Division durch 5 außer der 0 vier Teilerreste auftreten können, ergibt sich die Länge der Gesamtsequenz[3] aus $4 \cdot 5 = 20$. Analog berechnet man für 2 die Sequenzlänge $1 \cdot 3 = 3$ und für 3 eine Sequenzlänge $2 \cdot 4 = 8$. Hier scheint sich die Formel abzuzeichnen:

$$[\text{Sequenzlänge}] = [\text{Anzahl nicht-trivialer Teilerreste}] \cdot [\text{Ordinalzahl der Fibonacci-Zahl}]$$

Diese Formel scheint aber nur für Fibonacci-Primzahlen richtig zu sein, wie man bemerkt, wenn man die Sequenz für 8 betrachtet[4]. Sie weist nur 12 Elemente (und nicht 42) auf.

Bemerkenswert hierbei ist, dass zwei Teilerreste gar nicht auftreten, nämlich die 6 und die 4. Das Fehlen der 4 bedeutet, dass es keine Fibonacci-Zahl gibt, die durch 4, aber nicht durch 8 teilbar wäre. Anders gesagt: Jede durch 4 teilbare Fibonacci-Zahl ist auch durch 8 teilbar. Wir können die Teilbarkeitsregel folgern:

[3] Diese Zahl wird auch Wall-Zahl genannt (Wall bitte englisch aussprechen).
[4] Auch für Fibonacci-Primzahlen gilt die Formel nicht immer. Sie gilt z.B. nicht für 13.

> Ist eine Fibonacci-Zahl durch 4 teilbar, so ist auch ihr 6. Nachfolger durch 4 teilbar, aber kein früherer Nachfolger.

Diese Regel ist insofern bemerkenswert, als dass 4 die kleinste Nicht-Fibonacci-Zahl ist.

> **Aufgabe 4:** Die nächste Nicht-Fibonacci-Zahl ist 6. Gibt es durch 6 teilbare Fibonacci-Zahlen? Wenn ja: Wie dicht liegen diese Zahlen in der Fibonacci-Folge?

> **Aufgabe 5:** Untersuche auch die Teilbarkeit durch 7.

Kehren wir zu den Periodizitäten der Teilerrestfolgen zurück. Man kann errechnen:

Zahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Periodenlänge	3	8	6	20	24	16	12	24	60	10
= Wall-Zahl	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$1 \cdot 6$	$4 \cdot 5$	$2 \cdot 12$	$2 \cdot 8$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 12$	$4 \cdot 15$	$1 \cdot 10$

Die Wall-Zahl ergibt sich stets als Produkt zweier Zahlen. Für manche Fibonacci-Primzahlen war dies (s.o.):

> [Sequenzlänge] = [Anzahl nicht-trivialer Teilerreste] · [Ordinalzahl der Fibonacci-Zahl]

Der zweite Faktor der Multiplikation ist auch für alle anderen Zahlen zu errechnen: Man suche die kleinste Fibonacci-Zahl die Vielfaches der Ausgangszahl ist und nehme deren Ordinalzahl. So ist 8 das kleinste Vielfache von 4, das auch eine Fibonacci-Zahl (Ordinalzahl: 6) ist. 144 ist die kleinste Fibonacci-Zahl, die Vielfaches von 6, aber auch von 9 ist (Ordinalzahl: 12), bei der 10 muss ich mich schon bis zur Fibonacci-Zahl 610 quälen (Ordinalzahl: 15), etc.

Das ist wunderbar, um Teilbarkeitsregeln zu formulieren:

> **Satz 1:** Sei k eine Zahl und n das kleinste Vielfache von k, das zugleich eine Fibonacci-Zahl ist. Sei außerdem κ die Ordinalzahl dieser Fibonacci-Zahl, so ist mit jeder Fibonacci-Zahl, die durch k teilbar ist, auch deren κ-ter Nachfolger durch k teilbar. Aus der Konstruktion von κ lässt sich dann schließen: Jede κ-te Fibonacci-Zahl ist durch k teilbar. Ich möchte κ die *Fibonacci-Taktzahl* von k nennen.

Beispiel: Für $k = 10$ erhält man $n = 610$ und $\kappa = 15$. Damit ist ab der Fibonacci-Zahl 610 jede 15. Fibonacci-Zahl durch 10 teilbar.[5] Die nächste durch 10 teilbare Fibonacci-Zahl wäre also 832040 gefolgt von der schon recht astronomischen 1 134 903 170.

> **Satz 2:** Mit Hilfe von Satz 1 kann man analog zum *Sieb des Erastosthenes* ein Verfahren mit den Fibonacci-Zahlen durchführen. Da mit jeder Fibonacci-Zahl $f_i > 1$ deren κ-te Nachfolger durch die Teiler von f_i teilbar sind, kann man so die Nicht-Primzahlen in der Fibonacci-Folge aussieben (beachte aber die folgende Aufgabe). Folglich hätten alle[6] Fibonacci-Primzahlen Primzahl-Index.

> **Aufgabe 6:** Die Analogie zum *Sieb des Erastosthenes* ist nicht perfekt. Man muss einen Sonderfall untersuchen. Welcher Sonderfall ist das?

Wenn auch die Umkehrung der in Satz 2 getroffenen Feststellung gälte (Jede n-te Fibonacci-Zahl ist Primzahl, wenn n eine Primzahl ist), so wäre bewiesen, dass es unendlich viele Fibonacci-Primzahlen gibt.

[5] Das hatte Jannis auch schon prophezeit.
[6] Aufgabe beachten

Da dieser Klein-Fritzchen-Beweis in der Mathematik sicherlich schon bekannt wäre, gilt es eine Fibonacci-Zahl mit Primzahlindex zu finden, die teilbar ist.

f_3	2	f_{23}	28 657	f_{53}	53 316 291 173
f_5	5	f_{29}	514 229	f_{59}	956 722 026 041
f_7	13	f_{31}	1 346 269	f_{61}	2 504 730 781 961
f_{11}	89	f_{37}	24 157 817	f_{67}	44 945 570 212 853
f_{13}	233	f_{41}	165 580 141	f_{71}	308 061 521 170 129
f_{17}	1597	f_{43}	433 494 437	f_{73}	806 515 533 049 393
f_{19}	4181	f_{47}	2 971 215 073	f_{79}	14 472 334 024 676 221

Aha. Die blau markierten Fibonacci-Zahlen sind keine Primzahlen, wie man der folgenden Aufstellung entnehmen kann:

$$f_{19} = 4181 = 37 \cdot 113 = (2 \cdot 19 - 1) \cdot (6 \cdot 19 - 1)$$
$$f_{31} = 1\,346\,269 = 557 \cdot 2417 = (18 \cdot 31 - 1) \cdot (78 \cdot 31 - 1)$$
$$f_{37} = 24\,157\,817 = 73 \cdot 149 \cdot 2221 = (2 \cdot 37 - 1) \cdot (4 \cdot 37 + 1) \cdot (60 \cdot 37 + 1)$$
$$f_{41} = 165\,580\,141 = 2789 \cdot 59369 = (68 \cdot 41 + 1) \cdot (1448 \cdot 41 + 1)$$
$$f_{53} = 53\,316\,291\,173 = 953 \cdot 55945741 = (18 \cdot 53 - 1) \cdot (1055580 \cdot 53 + 1)$$
$$f_{59} = 956\,722\,026\,041 = 353 \cdot 2710260697 = (6 \cdot 59 - 1) \cdot (45936622 \cdot 59 - 1)$$
$$f_{61} = 2\,504\,730\,781\,961 = 4513 \cdot 555003497 = (74 \cdot 61 - 1) \cdot (9098418 \cdot 61 - 1)$$
$$f_{67} = 44\,945\,570\,212\,853 = 269 \cdot 116849 \cdot 1429913 = (4 \cdot 67 + 1) \cdot (1744 \cdot 67 + 1) \cdot (21342 \cdot 67 - 1)$$
$$f_{71} = 308\,061\,521\,170\,129 = 6673 \cdot 46165371073 = (94 \cdot 71 - 1) \cdot (650216494 \cdot 71 - 1)$$
$$f_{73} = 806\,515\,533\,049\,393 = 9375829 \cdot 86020717 = (128436 \cdot 73 + 1) \cdot (1178366 \cdot 73 - 1)$$
$$f_{79} = 14\,472\,334\,024\,676\,221 = 157 \cdot 92180471494753 = (2 \cdot 79 - 1) \cdot (1166841411326 \cdot 79 - 1)$$

Unter den ersten 80 Fibonacci-Zahlen befinden sich also nur 11 Primzahlen und ebenfalls 11 mit Primzahl-Index, die aber teilbar sind.

Vermutung (1): Es seien k und l zwei unterschiedliche natürliche Zahlen mit den Fibonacci-Taktzahlen κ_k und κ_l. Es gilt:

$$\kappa_{k \cdot l} = \mathrm{kgV}(\kappa_k, \kappa_l)$$

(Die Vermutung ist falsch)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	4	6	5	12	8	6	12	15
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	12	7	24	20	12	9	12	18	30
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
8	30	24	12	25	21	36	24	14	60
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
30	24	20	9	40	12	19	18	28	30
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
20	24	44	30	60	24	16	12	56	75
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
36	42	27	36	10	24	36	42	58	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
15	30	24	48	35	60	68	36	24	120

Vermutung (2): n sei eine natürliche Zahl mit der Primzahlzerlegung $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_i$. Es gilt:

$$\kappa_n = \mathrm{kgV}(\kappa_{m_1}, \kappa_{m_2}, \ldots, \kappa_{m_i})$$

(auch diese Vermutung ist falsch)

Probleme bereiten Potenzen in der Primzahlzerlegung.

Um das Phänomen genauer zu untersuchen, betrachte ich die Fibonacci-Taktzahlen der 2er-Potenzen:

$$3, 6, 6, 12, 24, 48, 85(!), 87(!), \ldots$$

Die letzten beiden Werte beruhen meiner Einschätzung nach auf numerische Fehler (Auslöschung) bei meinem Octave-Programm. Davon abgesehen hat man – bis auf die Taktzahl von 8 (Fibonacci-Zahl) – eine reguläre Folge mit Verdoppelung.

Betrachten wir die Fibonacci-Taktzahlen der 3er-Potenzen:

$$4, 12, 36, 128, 1236, \ldots$$

Für die höheren Werte brauche ich ein zuverlässigeres Programm[7], ansonsten zeigt die Folge (vielleicht) eine Verdreifachung der Werte.

Taktzahlen der Primzahlen

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
3	4	5	8	10	7	9	18	24	14	30	19

41	43	47	53	59	61	67
20	44	16	27	58	15	68

Primzahl p, Taktzahl p+1 (zwei Remainder-Zyklen): 2,3,7,23,43,67,...
Primzahl p, Taktzahl p: 5
Primzahl p, Taktzahl p-1 (ein Remainder-Zyklus): 11,19,31,59,...

2	1	3	3	103	2	104	208	241	2	120	240	401	2	100	200
3	2	4	8	107	2	36	72	251	1	250	250	409	2	204	408
5	4	5	20	109	2	54	108	257	4	129	516	419	1	418	418
7	2	8	16	113	4	19	76	263	2	88	176	421	4	21	84
11	1	10	10	127	2	128	256	269	4	67	268	431	1	430	430
13	4	7	28	131	1	130	130	271	1	270	270	433	4	217	868
17	4	9	36	137	4	69	276	277	4	139	556	439	1	438	438
19	1	18	18	139	1	46	46	281	2	28	56	443	2	444	888
23	2	24	48	149	4	37	148	283	2	284	568	449	2	224	448
29	1	14	14	151	1	50	50	293	4	147	588	457	4	229	916
31	1	30	30	157	4	79	316	307	2	44	88	461	1	46	46
37	4	19	76	163	2	164	328	311	1	310	310	463	2	463	926
41	2	20	40	167	2	168	336	313	4	157	628	467	2	468	936
43	2	44	88	173	4	87	334	317	4	159	636	479	1	478	478
47	2	16	32	179	1	178	178	331	1	110	110	487	2	488	976
53	4	27	108	181	1	90	90	337	4	169	676	491	1	490	490
59	1	58	58	191	1	190	190	347	2	116	232	499	1	498	498
61	4	15	60	193	4	97	388	349	1	174	174	503	2	504	1008
67	2	68	136	197	4	99	396	353	4	59	236	509	1	254	254
71	1	70	70	199	1	22	22	359	1	358	358	521	1	26	26
73	4	37	148	211	1	42	42	367	2	368	736	523	2	524	1048
79	1	78	78	223	2	224	448	373	4	187	748	541	1	90	90
83	2	84	168	227	2	228	456	379	1	378	378	547	2	548	1096
89	4	11	44	229	1	114	114	383	2	384	768	557	4	31	124
97	4	49	196	233	4	13	52	389	4	97	388	563	2	188	376
101	1	50	50	239	1	238	238	397	4	199	396	569	2	284	568

[7] Programm fibo2.m.

Offenbar ist die Anzahl von Zyklen 4, wenn sich die Primzahl in der Form $4 \cdot n + 1$ darstellen lässt.

5	13	17	37	53	61	73	89	97	113	137	149	157	173	193	197
2	5	4	6	30	11	27	34	22	15	37	44	28	80	81	14

Teilerrestzyklen der Fibonaccizahlen

Sieht man einmal vom Fall $n = 2$ ab, so treten bei den Teilerrestfolgen $\tau_i = f_i \mod f_n$ (Fibonacci-Teilerzahlfolge) entweder zwei oder vier Zyklen auf. Ich definiere:

F2-Zyklus: Unter einem F2-Zyklus verstehe ich den Zyklus einer Fibonacci-Teilerzahlfolge mit zwei Null-Werten und dem Muster:

$$1, 1, 2, \dots, f_{n-1}, 0, f_{n-1}, \dots, f_n - 1, 1, 0$$

F2-Zyklen haben die Länge (Wall-Zahl) $2n$.

F4-Zyklus: Der F4-Zyklus durchläuft vier Nullwerte und zeigt das Muster:

$$1, 1, 2, \dots, f_{n-1}, 0, f_{n-1}, \dots, 1, f_n - 1, 0, f_n - 1, \dots, f_{n-1}, f_{n-2}, 0, f_{n-2}, \dots, f_n - 1, 1, 0$$

F4-Zyklen haben die Länge (Wall-Zahl) $4n$.

In F4-Zyklen gilt (außer bei Nullwerten): $\tau_i + \tau_{2n+i} = f_n$.

Man macht schnell die

Beobachtung: Sei τ_n eine Fibonacci-Teilerzahlfolge (mit $n > 3$). Es gilt dann: Bei geradem n durchläuft τ_n F2-Zyklen, bei ungeradem n F4-Zyklen.

Allgemeine Betrachtungen

Teilbarkeit von Nachfolgern

Nachfolger-Formel: Die Nachfolger von f_i sind: $f_i + f_{i-1}$, $2f_i + f_{i-1}$, $3f_i + 2f_{i-1}$, ... Der j-te Nachfolger von f_i ist damit: $f_{j+1}f_i + f_j f_{i-1}$.

Insbesondere berechnet man für den i-ten Nachfolger:

$$f_{2i} = f_{i+1}f_i + f_i f_{i-1} = f_i(f_{i+1} + f_{i-1})$$

Aus dieser Formel folgt unmittelbar, das f_{2i} durch alle Zahlen teilbar ist, durch die auch f_i teilbar ist.

Ferner kann man diese Formel noch umwandeln:

$$f_{2i} = f_i(f_{i+1} + f_{i-1}) = (f_{i+1} - f_{i-1})(f_{i+1} + f_{i-1}) = f_{i+1}^2 - f_{i-1}^2$$

Aufschlussreich ist es auch, den $i-1$-en Nachfolger anzuschauen. Die Nachfolger-Formel zeigt hier:

$$f_{2i-1} = f_i f_i + f_{i-1}f_{i-1} = f_i^2 + f_{i-1}^2$$

Addiert man also die Quadrate zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen, erhält man eine weitere Fibonacci-Zahl.

Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index lassen sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen. Für Fibonacci-Zahlen mit geradem Index gilt dies nicht (Gibt es Ausnahmen?).

$$f_{4i} = f_i(f_{i+1} + f_{i-1})(f_{2i+1} + f_{2i-1}) = f_i(f_i + 2f_{i-1})(3f_i^2 + 2f_i f_{i-1} + 2f_{i-1}^2)$$

Teilbarkeit durch Potenzen

Satz: Sei f_k eine Fibonacci-Zahl, die durch 2^n teilbar ist, dann ist f_{2k} durch 2^{k+1} teilbar.

Nach der Nachfolgerformel erhält man:

$$f_{2k} = f_k \cdot (f_{k+1} + f_{k-1}) = f_k \cdot (f_k + 2f_{k-1})$$

Da es für f_k die Zerlegung $f_k = 2^n \cdot a$ (mit natürlicher Zahl a) gibt, hat man:

$$f_{2k} = 2^n \cdot a \cdot (2^n \cdot a + 2f_{k-1}) = 2^{n+1} \cdot a \cdot (2^{n-1} \cdot a + f_{k-1})$$

Die Verallgemeinerung auf andere Faktoren als 2 ist nicht ganz simpel. Man gewinnt ein rekursives System aus den folgenden Spezialfälle der Nachfolgerformel:

$$f_{(n+1)i-1} = f_{ni-1}f_{i-1} + f_{ni}f_i \qquad\qquad f_{(n+1)i} = f_{ni}f_i + f_{ni-1}f_i + f_{ni}f_{i-1}$$

Über das System bestimmt man die Koeffizienten für das Polynom:

$$f_{ni} = a_n\, f_i^n + a_{n-1}\, f_i^{n-1} f_{i-1} + a_{n-2}\, f_i^{n-2} f_{i-1}^2 + \ldots + a_1\, f_i f_{i-1}^{n-1} + a_0\, f_{i-1}^n$$

Ich will lustig sein und die Koeffizienten *Fibonial-Koeffizienten* nennen. Sie lauten[8]:

1	0								
1	2	0							
2	3	3	0						
3	8	6	4	0					
5	15	20	10	5	0				
8	30	45	40	15	6	0			
13	56	105	105	70	21	7	0		
21	104	224	280	210	112	28	8	0	
34	189	468	672	630	378	168	36	9	0

Man kann folgern:

Potenzsatz: Es sei $f_i = q^n \cdot a$. Dann gilt: $f_{q\cdot i}$ ist ein Vielfaches von q^{n+1}.

Beweis: Im obigen Polynom ist der Koeffizient vor der Potenz f_{i-1}^j Null. Man kann also f_i ausklammern. $f_{q\cdot i}$ ist also ein Vielfaches von q^n. Da der Koeffizient vor $f_i f_{i-1}^{j-1}$ genau q ist und in sämtlichen anderen Summanden zumindest ein Faktor f_i zu finden ist, kann man ein weiteres q ausklammern.

[8] Programm fibko.m