Kaprekar-Konstanten

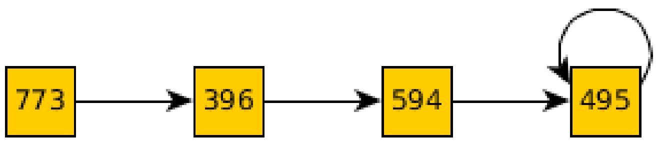
Benno, Darius, Osama 6.2018

Das Kaprekar-Verfahren

0, 495, 6174: So lauten die ersten drei *Kaprekar-Konstanten*. Sie wurden entdeckt von und benannt nach dem indischen Mathematiker Dattathreya Ramachandra Kaprekar.
Zu den Kaprekar-Konstanten gelangt man mit dem folgenden Verfahren:

1. Wähle eine natürliche Zahl.
2. Sortiere die Ziffern der Zahl in absteigender Folge.
3. Sortiere die Ziffern der Zahl in aufsteigender Folge.
4. Subtrahiere die Zahl aus (3) von der Zahl aus (2)
5. Wiederhole Schritt (2) bis (5).

Beispiel: Wir betrachten die Zahl 773. In absteigender Reihenfolge notiert: 773, in aufsteigender Reihenfolge: 377. Man rechnet: $773 - 377 = 396$.
Nun behandeln wir also die Zahl 396. Absteigend: 963, aufsteigend: 369. Damit erhalten wir: $963 - 369 = 594$.
Mit 594 gelangen wir zur Differenz $954 - 459 = 495$.
Für die Zahl 495 ergibt sich die vorherige Subtraktion: $954 - 459 = 495$.
Schematisch können wir unsere Berechnungen wie folgt zusammenfassen:



Dass mit Kaprekars Methode die Zahl 495 wieder auf sich abgebildet wird ($954 - 459 = 495$), ist eine Besonderheit, weswegen die 495 eben als Kaprekar-Konstante gilt.

Die triviale Kaprekar-Konstante 0 und die Zahlen unter 100

0 ist die erste und die einfachste Kaprekar-Konstante (einfache Lösungen nennen Mathematiker gerne trivial). Sie ergibt sich unmittelbar, wenn man das Kaprekar-Verfahren mit einer einstelligen Zahl beginnt, oder mit Zahlen, die aus mehreren gleichen Ziffern bestehen. Auch die Verfahren für zweistellige Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern enden stets bei der Kaprekar-Konstante 0.

Bei welchen zweistelligen Startzahlen braucht es die meisten Schritte im Kaprekar-Verfahren um zur Zahl 0 zu gelangen?

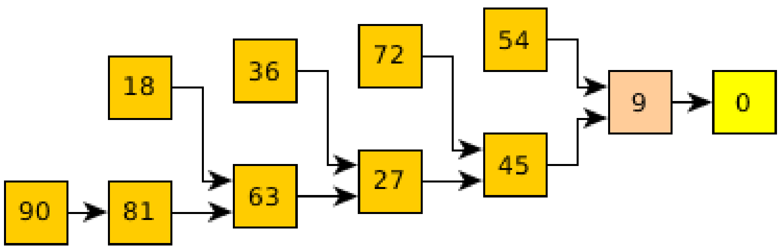
Beobachtung: Im ersten Kaprekar-Schritt wird jede Zahl mit zwei unterschiedlichen Ziffern auf ein Vielfaches von 9 abgebildet.

Begründung: Nehmen wir an, die Zahl besteht aus den Ziffern a und b und a sei größer als b, so ist die Differenz, die gebildet werden muss:

$$\begin{array}{rcc} & a & b \\ - & b & a \\ \hline & a-b-1 & 10+b-a \end{array}$$

Die Zahlen 1 und 10 ergeben sich aus dem nötigen Übertrag beim Subtrahieren („Eins im Sinn").

Die im ersten Kaprekar-Schritt gebildete Zahl hat also die Ziffern $a-b-1$ und $10+b-a$. Eine zweistellige Zahl mit diesen Ziffern hat die Quersumme: $a-b-1+10+b-a = a-a+b-b+10-1 = 9$. Zahlen mit Quersumme 9 sind Vielfache von 9.



Die Abbildung oben zeigt, wie die zweistelligen Vielfachen von 9 (außer 99) über das Kaprekar-Verfahren stufenweise zur Zahl 0 absteigen. Die Zahl, die hierbei die meisten Stufen (nämlich 6) zurückzulegen hat, ist die 90.
Ein genauerer Blick auf das Kaprekar-Verfahren motiviert folgende Behauptung:

Behauptung: Bei zweistelligen Zahl kann man das Ergebnis, das die nächste Kaprekar-Stufe ergibt, durch folgende Berechnung bestimmen:

1. Bestimme die Differenz der Ziffern. $d = |a-b|$
2. Multipliziere die Differenz mit 9.

Beweis: Die obige Berechnung hat ergeben, dass ein Kaprekar-Schritt eine Zahl mit den Ziffern a und b auf eine Zahl mit den Ziffern $a-b-1$ (Zehner) und $10+b-a$ (Einer) abbildet. In beiden Ziffern finden wir die Differenz aus a und b:

$$a-b-1 = d-1 \qquad\qquad 10+b-a = 10-d$$

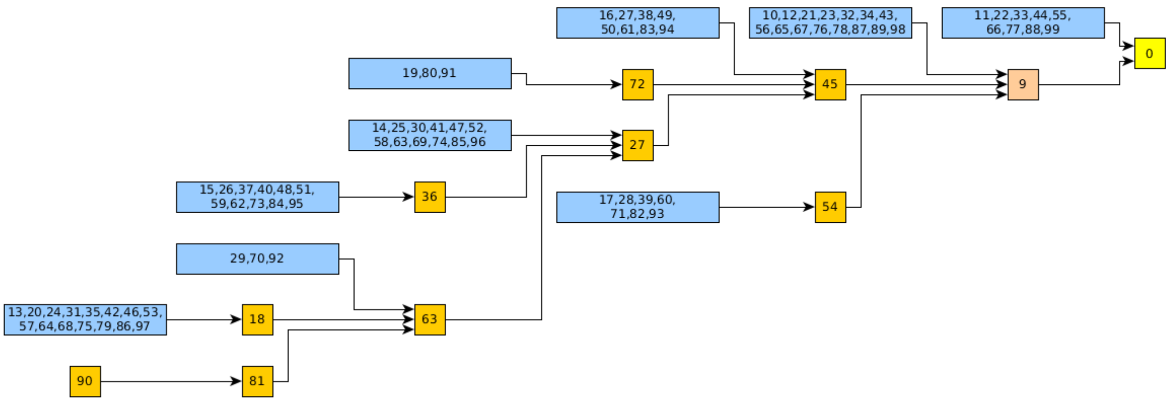
Die Zahl mit den Ziffern $d-1$ und $10-d$ ist aber genau das 9-fache von d, denn:

$$9 \cdot d = 10 \cdot d - d = \underbrace{10 \cdot (d-1)}_{\text{Zehner}} + \underbrace{10-d}_{\text{Einer}}$$

Mit Hilfe dieser Erkenntnis können wir überprüfen, ob es zweistellige Zahlen gibt, die im ersten Kaprekar-Schritt auf die 90 abgebildet werden und damit in sieben Schritten zur 0 absteigen. Nach dem gerade bewiesenen Satz sind dies Zahlen, deren Ziffern eine Differenz von $90 : 9 = 10$ aufweisen. Solche Zahlen gibt es nicht.
Ebenso lässt sich zeigen, dass es nur eine Zahl gibt, die im ersten Kaprekar-Schritt auf die 81 abgebildet wird. Es ist die Zahl, bei der die Differenz zwischen den Ziffern 9 ergibt, also die 90. Die einzige andere Möglichkeit mit sechs Schritten zur 0 zu gelangen führt über die Zahl 18. Auf sie werden alle Zahlen abgebildet, deren Ziffern die Differenz $18 : 9 = 2$ aufweisen. Das sind eine ganze Menge (nämlich 15 Zahlen):

$$13, 20, 24, 31, 35, 42, 46, 53, 57, 64, 68, 75, 79, 86, 97$$

Wir können nun das Kaprekar-Diagramm für zweistellige Zahlen vervollständigen:



Zusammenfassend stellt man für zweistellige Zahlen fest:

Beträgt die Differenz zwischen den Ziffern 0, so sinkt die Zahl in 1 Schritt zur 0 ab.
Beträgt die Differenz zwischen den Ziffern 1, so sinkt die Zahl in 2 Schritten zur 0 ab.
Beträgt die Differenz zwischen den Ziffern 5 oder 6, so sinkt die Zahl in 3 Schritten zur 0 ab.
Beträgt die Differenz zwischen den Ziffern 3 oder 8, so sinkt die Zahl in 4 Schritten zur 0 ab.
Beträgt die Differenz zwischen den Ziffern 4 oder 7, so sinkt die Zahl in 5 Schritten zur 0 ab.
Beträgt die Differenz zwischen den Ziffern 2 oder 9, so sinkt die Zahl in 6 Schritten zur 0 ab.

Oder in graphischer Darstellung:

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

1
2
3
4
5
6

Dreistellige Zahlen und das Kaprekar-Verfahren

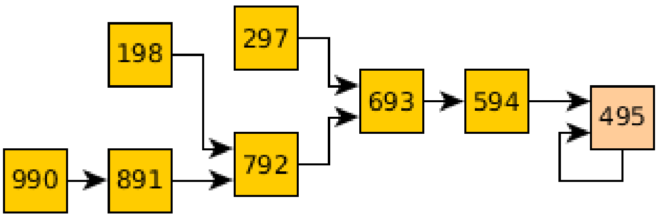
Dreistellige Zahlen mit drei identischen Ziffern sinken in einem Schritt auf die Kaprekar-Konstante 0.
Für alle übrigen dreistelligen Zahlen können wir wie oben die Differenz bilden:

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ \hline \\ & a-c-1 & 9 & 10+c-a \end{array}$$

Auch im diesen Fällen hängt das Ergebnis des ersten Kaprekar-Schritts allein von der Differenz der wertgrößten und wertkleinsten Ziffer ab (hier: $d = a - c$). Das Ergebnis lautet (in Ziffern): $d - 1; 9; 10 - d$.
Das Ergebnis des ersten Kaprekar-Schritts für die hier betrachteten Zahlen kann wie folgt aussehen:

1. Bilde die Differenz aus der wertgrößten und aus der wertkleinsten Ziffer. $d = a - c$
2. Das Ergebnis der ersten Kaprekar-Schritts ist das 99-fache dieser Differenz.

Etwas außergewöhnlich ist der erste Kaprekar-Schritt für dreistellige Zahlen, bei denen zwischen wertgrößter und wertkleinster Ziffer die Differenz 1 besteht. Sie werden auf die 99 abgebildet und steigen im nächsten Schritt ab auf die Kaprekar-Konstante 0.
Um das Verhalten der übrigen dreistelligen Zahlen im Kaprekar-Verfahren zu untersuchen, betrachten wir zunächst das Gerüst, das die dreistelligen Vielfachen von 99 bilden:



Zunächst fehlt aber der Nachweis, dass $5 \cdot 99 = 495$ eine Kaprekar-Konstante ist, also auf sich selbst abgebildet wird. Zudem ist zu zeigen, dass es keine weitere Kaprekar-Konstante gibt.

Beweis (a): Bei der Zahl 495 ist die wertkleinste Ziffer um 5 kleiner als die wertgrößte. Sie wird also auf $5 \cdot 99 = 495$ abgebildet.

Beweis (b): Eine dreistellige Kaprekarzahl muss Vielfaches von 99 sein (da jede dreistellige Zahl mit einer Zifferndifferenz von mindestens 2 auf ein Vielfaches von 99 abgebildet wird).
Die Zahl $n \cdot 99$ hat als wertgrößte Ziffer die Zehnerstelle mit 9. Die wertniedrigste Ziffer findet sich (für $n \leqslant 5$) bei der Hunderterstelle mit $n-1$, bzw. (für $n > 5$) bei der Einerstelle mit $10-n$. Die Differenz aus höchster und niedrigster Stelle beträgt im ersten Fall $10 - n$, im zweiten Fall $n - 1$.
Um eine Kaprekar-Konstante zu finden, muss also entweder für $n \leqslant 5$ die Gleichung $n = 10-n$ gelten oder für $n > 5$ die Gleichung $n = n - 1$. Diese zweite Gleichung hat keine Lösung, die

erste Gleichung ist erfüllt, wenn gilt $n = 5$. Wir erhalten wieder $5 \cdot 99 = 495$ als Kaprekar-Konstante und haben bewiesen, das diese die einzige dreistellige ist.
Nun aber zur Untersuchung von dreistelligen Zahlen mit Zifferndifferenz größer 2, die nicht Vielfache von 99 sind.
Man beobachtet zunächst Folgendes:

> Dreistellige Zahlen, bei denen zwischen der werthöchsten und wertniedrigsten Ziffer eine Differenz d besteht, die größer ist als 4, werden in $d - 4$ Schritten auf die Zahl 495 abgebildet.
>
> Ausgenommen von dieser Regel ist einzig die Zahl 495 selbst, die in 0 Schritten auf sich selbst abgebildet wird.
>
> Eine Untersuchung der Zahlen, bei denen gilt $2 \leqslant d \leqslant 4$ erbringt, dass diese in $7 - d$ Schritten 495 erreichen.

Tabellarisch zusammengefasst:

Zifferndifferenz	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
wird abgebildet auf	0	0	495	495	495	495	495	495	495	495
Anzahl der Schritte	1	2	5	4	3	1	2	3	4	5

Vierstellige Zahlen und das Kaprekar-Verfahren

Es mag ein wenig langweilig sein, aber auch bei der Erforschung der vierstelligen Zahlen subtrahiert man zunächst eine Beispielzahl. Da Zahlen mit identischen Ziffern sofort auf die 0 abgebildet werden, betrachtet wir hier Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern. Der Normalfall, der auftritt ist:

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline \\ & a-d & b-c-1 & 9+c-b & 10+d-a \end{array}$$

Es ist aber auch möglich, dass die Ziffern b und c gleichgroß sind. In diesem Fall gibt es auch von der Hunderter-Stelle auf die Tausender Stelle einen Übertrag (in der Rechnung ersetzen wir Variable c durch Variable b, da beide Werte gleichgroß sind).

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & b & d \\ - & d & b & b & a \\ \hline \\ & a-d-1 & 9 & 9 & 10+d-a \end{array}$$

Wir können zusammenfassen: Vierstellige Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern werden im Kaprekar-Verfahren in der Regel auf eine Zahl abgebildet, deren Randziffern (Tausender, Einer) zusammen 10 ergeben und deren Mittelziffern (Hunderter, Zehner) sich zu 8 summieren (Typ A).
Zahlen, bei denen die Ziffern mittlerer Größe doppelt auftreten oder Zahlen mit drei identischen Ziffern (z.B.: 5331, 6662) werden auf Zahlen abgebildet, deren Randziffern sich auf 10 summieren und deren Mittelziffern 9 sind (Typ B).

> Welche Zahlen von Typ A werden auf Typ B abgebildet? Welche Zahlen von Typ B werden auf Typ B abgebildet?

Wie wir oben gesehen haben, bestehen Zahlen von Typ A aus einem Achter-Pärchen (Summe der Ziffern ist 8) und einem Zehner-Pärchen (Summe der Ziffern ist 10). Damit die Möglichkeit besteht, auf Typ B abgebildet zu werden, müsste entweder das Achter-Pärchen oder das Zehner-Pärchen aus gleichen Ziffern bestehen. Daneben gibt es die Möglichkeit, dass sich gleiche Ziffern in unterschiedlichen Pärchen befinden.

Zahl	wird abgebildet auf		Zahl	wird abgebildet auf	
	1449	7992		5085	7992
	2448	5994		5175	5994
	3447	3996		5265	3996
	4446	1998		5355	1998
	5445	1089		5445	1089
	6444	1998		5535	1998
	7443	3996		5625	3996
	8442	5994		5715	5994
	9441	7992		5085	7992

Ein Wechsel von Typ A auf Typ B zeigen die in der Tabelle vermerkten Zahlen. In der linken Spalte finden sich Zahlen mit identischen Ziffern im Achter-Pärchen, rechts sind Zahlen, bei denen das Zehner-Pärchen aus gleichen Zahlen besteht.
Die Zahl 5445 spielt eine Sonderrolle, hier bestehen Achter- und Zehner-Pärchen aus gleichen Ziffern und es gibt keine Ziffer mittlerer Größe. Im Kaprekar-Schritt wird 5445 auf 1089, also auf eine Zahl von Typ A abgebildet.
Zahlen vom Typ B werden grundsätzlich auf den Typ A abgebildet. Ausnahmen bilden die Zahlen 1999 und 9991. Sie werden mit dem Kaprekar-Verfahren in die Zahl 7992 verwandelt, beliebn also von Typ B. Allerdings verändern sich im Kaprekar-Schritt die Ziffern, sodass weder 1999 noch 9991 Kaprekar-Konstante sind und solche daher nicht unter Typ B zu finden sind.
Übergänge zu Typ B können auch in den Bereich der dreistelligen Zahlen führen. Man betrachte Zahlen, die aus den folgenden Ziffern bestehen:

$$\begin{array}{lllll}
\{1,1,1,0\} & \{2,2,2,1\} & \{3,3,3,2\} & \{4,4,4,3\} & \{5,5,5,4\} \\
\{0,0,0,1\} & \{1,1,1,2\} & \{2,2,2,3\} & \{3,3,3,4\} & \{4,4,4,5\} \\
\{5,5,5,6\} & \{6,6,6,7\} & \{7,7,7,8\} & \{8,8,8,9\} & \\
\{6,6,6,5\} & \{7,7,7,6\} & \{8,8,8,7\} & \{9,9,9,8\} &
\end{array}$$

All diese Zahlen (68 Stück) werden auf 999 und dann unmittelbar auf 0 abgebildet.
Ich habe versucht einen Nachweis zu verfassen, der bestätigt, dass 6174 die einzige vierstellige Kaprekar-Konstante ist. Er geriet sehr technisch mit einer Vielzahl an Fallunterscheidungen. Da ist die brute-force Methode übersichtlicher, alle Kandidaten für eine Kaprekar-Konstante durch das Kaprekar-Verfahren laufen zu lassen und zu überprüfen, ob sie auf sich selbst abgebildet werden. Das Resultat ist auf Seite 7 dargestellt. Es wird deutlich, dass in der Tat 6174 die einzige Kaprekar-Konstante ist. Aus dem Diagramm wird auch ersichtlich, wie viele Schritte die aufgenommenen Zahlen durchlaufen, um auf 6174 abgebildet zu werden. Mir gelingt es nicht, eine Regel zu formulieren, wie man für eine gegebene Zahl berechnen kann, wie viel Schritte benötigt werden, sie auf die Kaprekar-Konstante zu bringen.

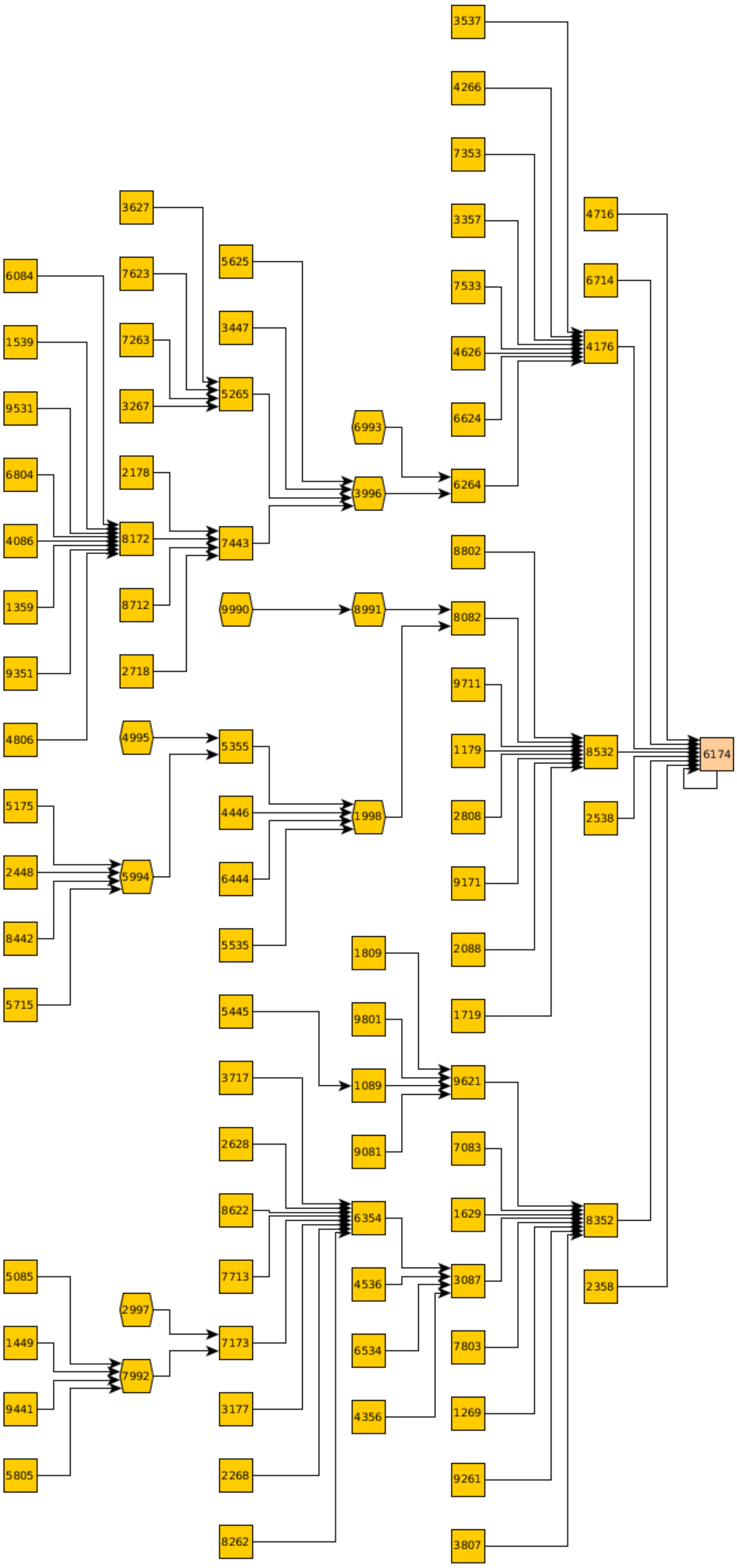


Tabelle 1: Die vierstelligen Zahlen von Typ A und Typ B in ihren Kaprekar-Stufen.

Fünfstellige Zahlen und das Kaprekar-Verfahren

Für fünfstellige Zahlen werden die Untersuchungen nicht einfacher und von den Beweisen ist noch weniger als bislang Eleganz zu erwarten. Zum Trost vorweg: Auf der Suche nach Kaprekar-Konstanten stößt man auf Unvorhergesehenes. Mit ein wenig Herumprobieren stellt man fest: Statt einer oder mehrerer Kaprekar-Konstanten, treten Kaprekar-Zyklen auf. Man entdeckt einen Zweier-Zyklus:

$$59994 \quad 53955$$

Und zwei Vierer-Zyklen:

$$74943 \quad 62964 \quad 71973 \quad 83952$$

bzw.

$$63954 \quad 61974 \quad 82962 \quad 75933$$

Vielleicht hat der Leser schon herausgefunden, dass die aufgeführten Zahlen Eigenschaften aufweisen, die bereits von Bedeutung waren:

- Die Zahlen sind Vielfache von 9.
- Die Mittelziffer der Zahlen ist eine 9. Das war bereits bei dreistelligen Zahlen, die dem Kaprekar-Verfahren entstammten, der Fall.
- Fast alle der gelisteten Zahlen bestehen aus einem 10er- und einem 8er-Paar, so wie wir es von den vierstelligen Zahlen kennen, die das Kaprekar-Verfahren ausspuckt.

  Von dieser Regel weicht die Zahl 59994 ab. Sie entspricht einer vierstelligen Typ B-Zahl: Alle Ziffern 9 bis auf ein umrahmendes 9er-Paar.

Diese Eigenschaften finden sich allgemein bei fünfstelligen Zahlen, die dem Kaprekar-Verfahren entstammen.
Eine Eigenschaft, die auf dem ersten Blick nicht in Erscheinung tritt aber sehr nützlich ist, ist die Tatsache, dass 9 nicht der größte gemeinsame Nenner ist: Alle fünfstelligen Zahlen, die das Kaprekar-Verfahren auswirft, sind Vielfache von 99.

Beweis: Um zu beweisen, dass fünfstellige Kaprekar-Ergebnisse durch 99 teilbar sind, zeigen wir, dass sie zugleich Vielfache von 9 wie von 11 sind. Dazu verwenden wir neben der bekannten Teilbarkeitsregel für 9 auch die folgende Regel:

> Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre *alternierende Quersumme* durch 11 teilbar, oder 0 ist.

Die alternierende Quersumme erhält man, wenn man die Ziffern einer Zahl mit wechselndem Vorzeichen zusammenzählt. Die Teilbarkeit von 63954 ergibt sich also aus der Rechnung:

$$6 - 3 + 9 - 5 + 4 = 11$$

Tatsächlich haben alle fünfstelligen Typ A Kaprekar-Ergebnisse die Quersumme 27 (10er-Paar + 8er-Paar + 9), was die Teilbarkeit durch 9 garantiert und die alternierende Quersumme von 11 (10er-Paar - 8er-Paar + 9), wodurch die Teilbarkeit durch 11 nachgewiesen ist.
Fünfstellige Typ B-Zahlen sind ebenso teilbar durch 9 (Quersumme: 9er-Paar + 3 · 9 = 36) und durch 11 (alternierende Quersumme: 9er-Paar - 2 · 9 + 9 = 0).

Jede Zahl, die durch 9 und durch 11 teilbar ist, ist ein Vielfaches von 99. Dies gilt insbesondere für die hier betrachteten Zahlen.
Der obige Beweis hat eine Lücke: Es bleibt zu zeigen, dass nur die beobachteten Zahlentypen (Typ A, Typ B) als Kaprekar-Ergebnis auftreten können.
Da wir Zahlen mit identischen Ziffern ausschließen, ist klar, das beim Bilden der Kaprekar-Differenz Überträge von der Einer-, von der Zehner- und von der Hunderter-Stelle auftreten. Ein Übertrag von der Tausender-Stelle ist möglich. Tritt er nicht auf, so erhält man Typ A-Zahlen.

$$\begin{array}{cccccc}
 & a & b & c & d & e \\
- & e & d & c & b & a \\
\hline
 & a-e & b-d-1 & 9 & 9+d-b & 10+e-a
\end{array}$$

Kommt es zu einem Übertrag von der Tausender-Stelle, so findet man Typ B. Dies ist der Fall, wenn $b = c = d$:

$$\begin{array}{cccccc}
 & a & b & b & b & e \\
- & e & b & b & b & a \\
\hline
 & a-e-1 & 9 & 9 & 9 & 10+e-a
\end{array}$$

Andere fünfstellige Ziffernkombinationen sind nach dem Kaprekar-Schritt nicht möglich.

> Nicht alle Vielfache von 99 sind Kaprekar-Ergebnisse. Überprüfe, welche Resultate die Division mit 99 von Typ A- und Typ B-Zahlen hervorbringen kann.

Wir führen eine schriftliche Division durch. Dazu ist es hilfreich, wenn man weiß, welche Zifferdarstellung das Produkt aus einer einstelligen Zahl und 99 hat. Es gilt:

$$n \cdot 99 = n-1 \quad 9 \quad 10-n$$

Mit dieser Regel gelangt man zur Division (Typ A):

$$\begin{array}{ccccccccc}
a & b & 9 & 8-b & 10-a & : & 99 & = a & b+1 \quad a \\
a-1 & 9 & 10-a & & & & & & \\
\cline{1-3}
0 & b+1 & a-1 & 8-b & & & & & \\
 & b & 9 & 9-b & & & & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & a-1 & 9 & 10-a & & & & \\
 & & a-1 & 9 & 10-a & & & & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

bzw. Typ B:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a & 9 & 9 & 9 & 9-a & : & 99 & = a+1 & 0 \quad a+1 \\
a & 9 & 9-a & & & & & & \\
\cline{1-4}
0 & 0 & a & 9 & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
\cline{2-5}
 & 0 & a & 9 & 9-a & & & & \\
 & & a & 9 & 9-a & & & & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

Ergebnis: Die fünfstelligen Kaprekar-Ergebnisse von Typ A kann man als Produkt $[a \;\; b+1 \;\; a] \cdot 99$ schreiben. Für Typ B gibt es die Schreibweise $[a+1 \;\; 0 \;\; a+1] \cdot 99$.

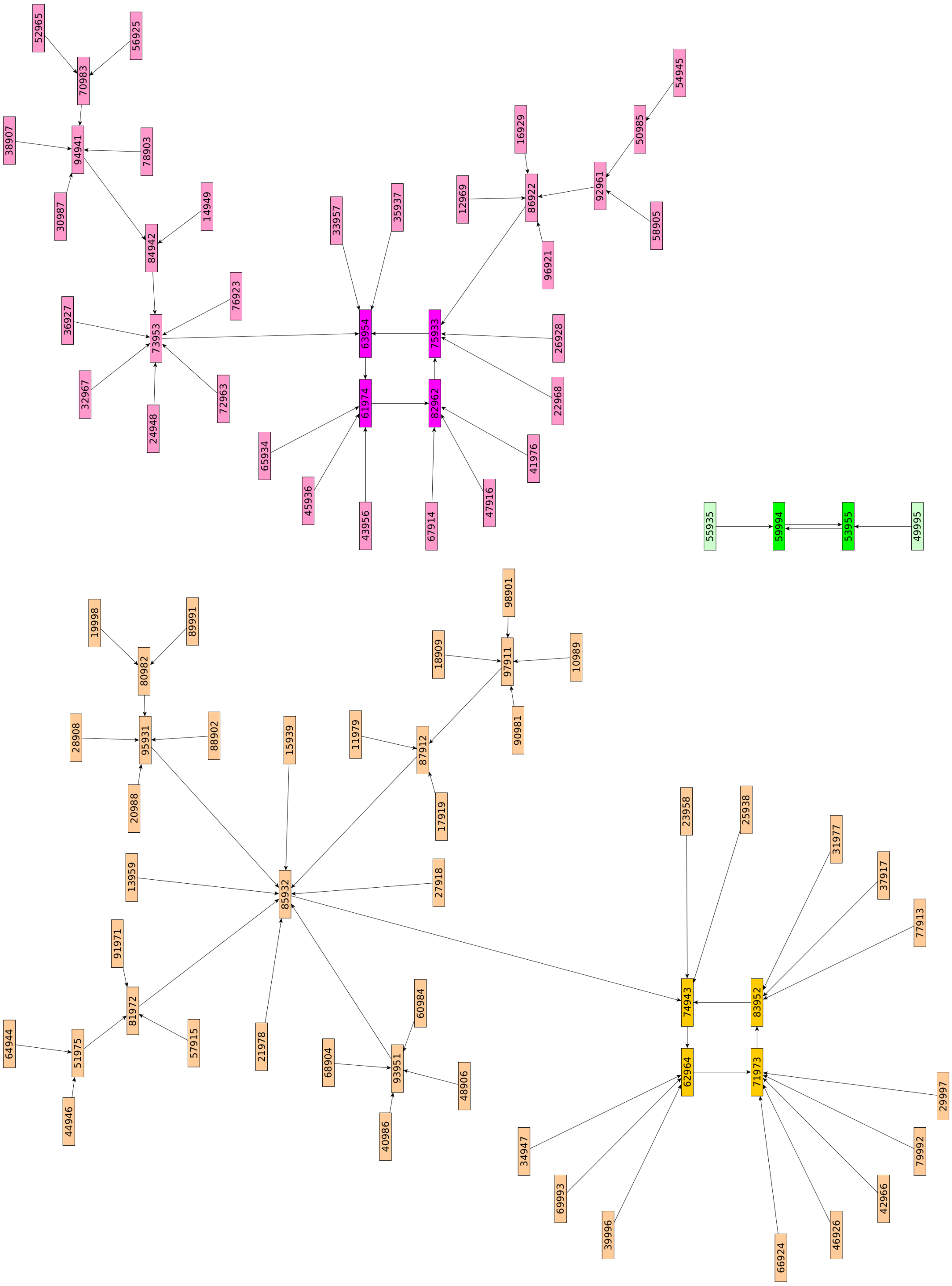
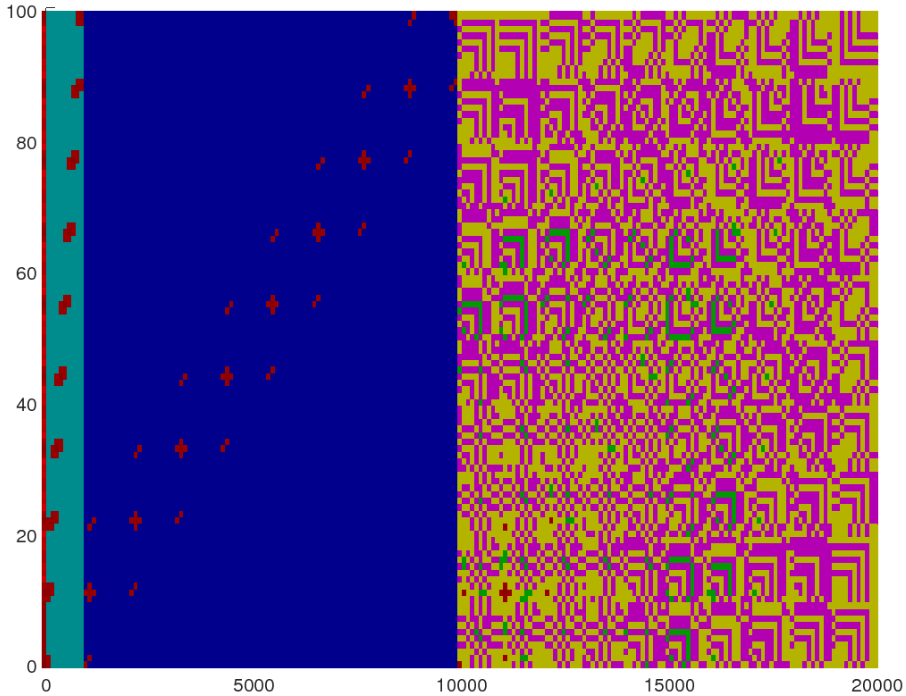


Abbildung 1: Fünfstellige Zahlen und die Kaprekar-Zyklen

Unendliche Weiten



Die hübsche Grafik, die ältere Leser möglicherweise an Spiele aus der Frühzeit des Computers erinnert zeigt die Einzugsbereiche der bislang vorgestellten Kaprekar-Kontanten und -Zyklen. Für jede Zahl zwischen 0 und 20000 wurde berechnet, auf welche Kaprekar-Konstante bzw. welchen Kaprekar-Zyklus sie absteigt. Um das Ganze zweidimensional darzustellen wurden die Startzahlen zerlegt: 4365 zum Beispiel in $4300 + 65$. Die Startzahl ist dann dort zu finden, wo der x-Wert 4300, der y-Wert 65 ist. Die Farbe, in der die Startzahl erscheint gibt an, zu welcher Konstanten, bzw. welchem Zyklus sie absteigt: (0) rot ;(495) cyan; (6714) blau. Violett, ocker und grün kennzeichnen Zahlen die zu den Zyklen absteigen. Die Farben sind gewählt wie in der Darstellung auf Seite 10.

Sämtliche Werte der Kaprekar-Zyklen liegen außerhalb des dargestellten Bereichs, wobei sich die Struktur der Einzugsgebiete bis zum Wert 100000 kaum ändert.

Im sechsstelligen Bereich treten erstmals Kaprekar-Konstanten zusammen mit einem Kaprekar-Zyklus auf. Die Kaprekar-Konstanten liegen bei:

$$549945 \qquad \text{und} \qquad 631764$$

Der Zyklus hat die Länge sieben und besteht aus den Zahlen:

$$420876 \longrightarrow 851742 \longrightarrow 750843 \longrightarrow 840852 \longrightarrow 860832 \longrightarrow 862632 \longrightarrow 642654$$

Offenbar bestehen im Sechsstelligen die Typ A-Zahlen aus einem 10er-, einem 9er- und einem 8er-Paar. Die Zahl 549945 gehört einem anderen Typus an (Typ B: 10er-Paar, 8er-Paar, Doppel-9). Ich vermute, dass es einen weiteren Typus gibt.

Der größte gemeinsame Teiler der Kaprekar-Konstanten und Kaprekar-Zyklus-Zahlen ist 99.

Stellenzahl	Zahlenaufbau	ggT
Zweistellig	$X_9\,X_9$	9
Dreistellig	$X_9\,9\,X_9$	99
Vierstellig	$X_{10}\,X_8\,X_8\,X_{10}$	99
	$X_9\,9\,9\,X_9$	
Fünfstellig	$X_{10}\,X_8\,9\,X_8\,X_{10}$	99
	$X_9\,9\,9\,9\,X_9$	
Sechsstellig	$X_{10}\,X_9\,X_8\,X_8\,X_9\,X_{10}$	99
	$X_{10}\,X_8\,9\,9\,X_8\,X_{10}$	99

Mehr Systematik im Binären

Sehr viel systematischer kann man den Kaprekar-Algorithmus betrachten, wenn man Zahlen statt im Dezimal-System im binären System verfolgt. Da im Kaprekar-Algorithmus Zahlen in Ziffern zerlegt und neu angeordnet werden, hängt das Verfahren wesentlich davon ab, welches Zahlensystem (10er System oder 2er System) man betrachtet. Die kleinste Kaprekar-Konstante (außer der Null) ist im binären System die Zahl 1001. Ins Zehnersystem übersetzt ist die Zahl die 9. Wir schreiben:

$$[1001]_2 = [9]_{10}$$

Die Zahlen hinter den eckigen Klammern zeigen an, auf welches Zahlensystem wir uns beziehen.
Für $[1001]_2$ lautet der Kaprekar-Schritt[1]:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline = & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Damit ist die Kaprekar-Eigenschaft von $[1001]_2$ nachgewiesen. Eine Eigenschaft, die die entsprechende dezimale Zahl $[9]_{10}$, wie wir gesehen haben, nicht hat.
Die Untersuchung, wie das Kaprekar-Verfahren binäre Zahlen in einem Schritt verändert, kann durch eine Fallunterscheidung geklärt werden:

Binäre Zahlen, die nur aus der Ziffer 1 (oder nur aus der Ziffer 0) bestehen Zahlen wie $[1111]_2$ oder $[000000]_2$ (wenn man letztere Kombination aus Nullen überhaupt betrachten will) werden unmittelbar aus $[0]_2$ abgebildet.

Binäre Zahlen, in denen die Ziffer 0 häufiger vorkommt, als die Ziffer 1 Wir betrachten eine binäre Zahl, in der p mal die Ziffer 1 und q mal die Ziffer 0 auftritt. Außerdem sei $q > p$ (es gibt in der Zahl also mehr Nullen als Einsen).
Das Sortieren und Subtrahieren der umgestellten Zahlen nach den Kaprekar-Regeln ergibt:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \hline = & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}$$

Man stellt Folgendes fest:

[1]Das Subtrahieren im binären System sieht etwas anders aus, als im Zehnersystem, funktioniert aber im Prinzip genauso. Mit ein bisschen Übung lernt man die Rechenregeln schnell.

1. Steht in der ersten Zeile eine 0 und in der zweiten eine 1, so berechnet sich für die dritte Zeile (das Ergebnis) bei allen Stellen eine 0, außer bei der Stelle ganz rechts. Dort findet man eine 1.

2. Steht in den ersten beiden Zeilen eine 0, so findet man in der Ergebniszeile eine 1.

3. Steht in der ersten Zeile eine 1 und in der zweiten eine 0, so ergibt sich für die dritte Zeile eine 1. Eine Ausnahme bildet die Spalte, die am weitesten rechts steht. Hier findet man im Ergebnis die Ziffer 0.

Man kann nun die Anzahl für die Ziffern 0 und die Ziffern 1 im Ergebnis nach den obigen Kategorien ableiten:

Kategorie	Spalte	Anz. 0	Anz. 1
1.	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p-1$	1
2.	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	0	$q-p$
3.	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1	$p-1$
Summe		p	q

Die im Kaprekar-Schritt berechnete Zahl besteht also aus q Einsen und p Nullen. Die 1 tritt also nach dem Kaprekar-Schritt so häufig auf, wie vorher die 0 und umgekehrt.
Es folgt, dass es keine binären Zahlen gibt, die mehr Nullen als Einsen enthalten und Kaprekar-konstant sind.

Binäre Zahlen, in denen die Ziffer 1 häufiger vorkommt, als die Ziffer 0 Wieder beschreibt p die Anzahl der Einsen, q die Anzahl von Nullen. Im betrachteten Fall gilt $p > q$. Der Kaprekar-Schritt sieht ähnlich aus wie oben, aber statt einer Doppel-Null-Zone in der Mitte, findet man dort eine Doppel-Eins-Zone:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \hline = & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}$$

Statt der Kategorie 2 oben erhalten wir eine vierte Kategorie:

4. Steht in den beiden ersten Zeile Einsen, so enthält auch die dritte Zeile eine 1.

Wir bilanzieren wieder:

Kategorie	Spalte	Anz. 0	Anz. 1
1.	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$q-1$	1
4.	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	0	$p-q$
3.	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1	$q-1$
Summe		q	p

Im betrachteten Fall bleiben also die Anzahlen von Einsen und Nullen erhalten. Das bedeutet, dass jedes Ergebnis einer Kaprekar-Berechnung (außer der 0) eine Kaprekar-Konstante ist.

> Manche Kaprekar-Ergebnisse enthalten nur eine Ziffer 0. Begründe, warum man diese Zahlen nicht als Kaprekar-Konstanten akzeptieren sollte.

Binäre Zahlen, in denen die Ziffer 1 genauso häufig vorkommt, wie die Ziffer 0 Der Fall ist wie der vorhergehende zu behandeln.

Binäre Kaprekar Konstanten

Wir haben gerade festgestellt, dass man stets eine binäre Kaprekar-Konstante erhält, wenn man den Kaprekar-Schritt für Zahlen durchführt, die

1. Mindestens so viele Einsen enthalten wie Nullen.
2. Mindestens aber zwei Nullen aufweisen.

Die einfachste Möglichkeit für eine solche Zahl haben wir bereits oben kennengelernt. Vollzieht man für binäre Zahlen mit zwei Einsen und zwei Nullen den Kaprekar-Schritt, so erhält man $[1001]_2$.
Ebenfalls erfolgreich ist man mit drei Einsen und zwei Nullen. Es ergibt sich die Zahl $[10101]_2$. Sie entspricht dem Wert $[21]_{10}$.
Fährt man fort, so erhält man die binären Kaprekar-Konstanten:

Anz. 0	Anz. 1	Binärzahl	Dezimalwert
2	2	$[1001]_2$	$[9]_{10}$
2	3	$[10101]_2$	$[21]_{10}$
2	4	$[101101]_2$	$[45]_{10}$
3	3	$[110001]_2$	$[49]_{10}$
2	5	$[1011101]_2$	$[93]_{10}$
3	4	$[1101001]_2$	$[105]_{10}$
2	6	$[10111101]_2$	$[189]_{10}$
3	5	$[11011001]_2$	$[217]_{10}$
4	4	$[11100001]_2$	$[225]_{10}$

> Begründe, warum binäre Kaprekar-Konstanten (außer $[0]_2$) stets ungerade sind.

Konstruktion binärer Kaprekar-Konstanten

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie man mittels eines Kaprekar-Schritts eine binäre Kaprekar-Konstante konstruieren kann. Betrachtet man die Liste von Kaprekar-Konstanten oben, findet man auch ein formales Verfahren. Dazu durchläuft man folgende Schritte:

1. Wähle aus, wie viele Nullen (mindestens 2) und wie viele Einsen (mindestens so viel wie Nullen) Deine Kaprekar-Konstante haben soll. Die Anzahl von Nullen nennen wir q, die der Einsen nennen wir p.

2. Schreibe $p + q$ Einsen auf.
3. Ersetze die q-te Eins von links durch eine Null.
4. Zähle von rechts nach links q Stellen ab. Ersetze die 1 in der dann eingenommenen Position durch eine 0.
5. Gehe weiter nach rechts und ersetze alle Einsen durch 0, bis auf die letzte.

Beispiel:

1. Ich erzeuge eine binäre Kaprekar-Konstante mit 5 Einsen und 4 Nullen.
2. Ich notiere:
$$[111111111]_2$$
3. Ich ändere die vierte 1 von links in eine 0:
$$[111011111]_2$$
4. Ich ändere die vierte 1 von rechts in eine 0:
$$[111010111]_2$$
5. Ich ändere alle rechts von dieser 0 stehenden Einsen in 0, bis auf die letzte:
$$[111010001]_2$$

$[111010001]_2$ ist Kaprekar-konstant, denn

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline = & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Der Dezimalwert der binären Kaprekar-Konstante ist $[465]_{10}$.

Dezimalwerte binärer Kaprekar-Konstanten

Die binäre Entsprechung der Zahl $[465]_{10}$ ist also Kaprekar-konstant. Dies regt eine Frage an, ob man bestimmen kann, welche Dezimalzahlen in binärer Darstellung Kaprekar-konstant sind. Betrachtet man die obige Liste (mit den Dezimalwerten: $9, 21, 45, 49, 93, 105, 189, \ldots$) erscheint das einigermaßen rätselhaft.
Aufklären kann man das Rätsel, indem man den binären Kaprekar-Schritt dezimal nachvollzieht. Dies gelingt, indem man die Summen der Potenzen von 2 betrachtet.
Zunächst für's obige Beispiel ($[465]_{10}$): Zu bilden ist die folgende Differenz

$$(2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4) - (2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)$$

Ich klammere aus:

$$2^4 \cdot (2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) - (2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)$$

Damit hat man:

$$(2^4 - 1) \cdot (2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)$$

Die Summe in der rechten Klammer lässt sich (mit Hilfe einer Formelsammlung): vereinfachen:

$$(2^4 - 1) \cdot (2^5 - 1)$$

Tatsächlich berechnet man:

$$(2^4 - 1) \cdot (2^5 - 1) = 15 \cdot 31 = 465$$

Die Verallgemeinerung der Betrachtung zeigt, dass jedes dezimale Produkt $(2^m - 1) \cdot (2^n - 1)$ mit $2 \leqslant m \leqslant n$ eine binäre Darstellung hat, die Kaprekar-konstant ist.
Insbesondere findet man z.B.:

Anz. 0	Anz. 1	Binärzahl	Dezimalwert	Produkt
2	2	$[1001]_2$	$[9]_{10}$	$[3 \cdot 3]_{10}$
2	3	$[10101]_2$	$[21]_{10}$	$[3 \cdot 7]_{10}$
2	4	$[101101]_2$	$[45]_{10}$	$[3 \cdot 15]_{10}$
3	3	$[110001]_2$	$[49]_{10}$	$[7 \cdot 7]_{10}$
2	5	$[1011101]_2$	$[93]_{10}$	$[3 \cdot 31]_{10}$
3	4	$[1101001]_2$	$[105]_{10}$	$[7 \cdot 15]_{10}$
2	6	$[10111101]_2$	$[189]_{10}$	$[3 \cdot 63]_{10}$
3	5	$[11011001]_2$	$[217]_{10}$	$[7 \cdot 31]_{10}$
4	4	$[11100001]_2$	$[225]_{10}$	$[15 \cdot 15]_{10}$