Magische Rechtecke

Bastian, Hendrik, Bayhas 2.2018

Bastian machte den Vorschlag ähnlich wie magische Quadrate, magische Rechtecke zu konstruieren. Während die Quadrate mit den Zahlen 1 bis n^2 zu füllen waren, füllt man ein Rechteck der Größe $m \times n$ mit den Zahlen 1 bis $m \cdot n$. Außerdem müssen nicht alle Zeilen **und** Spalten die gleiche Summe haben: Bei magischen Rechtecken reicht es, wenn alle Spaltensummen einen Wert und alle Zeilensummen einen anderen Wert ergeben.

Feststellung 1: Magische Rechtecke haben immer mehr als eine Zeile und immer mehr als eine Spalte.

Feststellung 2: Nach Feststellung 1 ist der kleinste Kandidat für ein magisches Rechteck ein 2×3 Rechteck. Ein magisches Rechteck dieser Form gibt es aber nicht. Es wäre nämlich mit den Zahlen von 1 bis 6 zu füllen. Die Summe dieser Zahlen ist 21. Diese Zahl lässt sich zwar gleichmäßig auf drei Spalten, nicht aber auf zwei Zeilen aufteilen ($21 : 2 = 10,5$).

Aufgabe 1: Finde ein magisches Rechteck der Größe 2×4.

Lösung 1: Eine Lösung ist

1	4	6	7
8	5	3	2

Die Spaltensummen betragen jeweils 9, die Zeilensummen jeweils 18. Man erhält weitere Lösungen indem man Spalten (oder Zeilen) miteinander vertauscht. Da diese Lösungen nicht echt anders sind, befolgen wir, um nur wirklich unterschiedliche Lösungen zu erfassen, die folgende

Sortierungsregel: Der Eintrag oben links im magischen Rechteck ist immer 1. Die Spalten werden so angeordnet, dass die Einträge der ersten Zeile von links nach rechts größer werden. Die Zeilen werden so sortiert, dass die Einträge der ersten Spalte von oben nach unten größer werden.
Nach dieser Regel erkennt man, dass

2	5	3	8
7	4	6	1

keine echt neue Lösung ist, da man sie durch Zeilen- und Spaltentausch in die erste angegebene Lösung überführen kann.

Aufgabe 2: Zeige, dass es keine weitere echte Lösung für ein magisches 2×4 Rechteck gibt.

Lösung 2: Nach der Sortierungsregel ist der Eintrag links oben auf jeden Fall eine 1. Wir betrachten mögliche Einträge für das Feld rechts oben (nach der Sortierungsregel der größte Eintrag in der ersten Zeile). Dieser Eintrag kann nicht 8 sein, da die 8 unter der 1 stehen muss. Wenn der Eintrag 7 ist, müssen die beiden mittleren Einträge der ersten Zeile zusammen 10 ergeben. Dies ist aber nur durch die Summe 4+6 zu bewerkstelligen. Diese Kombination führt zur obigen Lösung. 5+5 funktioniert nicht, da die Einträge verschieden sein müssen und 3+7 geht auch nicht, da wir die 7 schon ganz rechts eingebaut haben.
Der Eintrag oben rechts könnte vielleicht aber auch 6 sein. Dann müssten die Mitteleinträge zusammen 11 ergeben. Nach der Sortierungsregel müssen aber beide Mitteleinträge kleiner als der Eintrag rechts (also 6) sein. Die Summe zweier Zahlen kleiner als 6 ist aber stets kleiner als 11.
Ebenso kann man alle Möglichkeiten ausschließen, in denen der Eintrag oben rechts kleiner ist als 6.

Der Wettbewerb

Um ein wenig Erfahrung zu sammeln, wie man magische Rechtecke aufbauen kann, veranstalteten wir unter den Schülerinnen und Schülern der AG einen Wettbewerb:

> Finde ein magisches Rechteck mit den folgenden Eigenschaften:
>
> 1. Das Rechteck hat mehr Spalten als Zeilen.
> 2. Das Rechteck ist mit aufeinanderfolgenden Zahlen (beginnend mit 1) gefüllt.
> 3. Die Summe der Zahlen ist in jeder Spalte gleich.
> 4. Die Summe der Zahlen ist in jeder Zeile gleich.
> 5. Die Zahl oben links im Rechteck ist 1
> 6. Die Zahlen der ersten Zeile werden von links nach rechts größer.
> 7. Die Zahlen der ersten Spalte werden von oben nach unten größer.
>
> Für Schülerinnen und Schüler, die als erste eine neue Lösung meldeten, gab es einen kleinen Preis.

Bald hatten wir die ersten Ergebnisse:

1	4	6	7
8	5	3	2

Bastian, 27.2.2018

1	4	6	7	9	12	14	15
16	13	11	10	8	5	3	2

Bayhas, 27.2.2018

1	3	7	8	9	11
12	10	6	5	4	2

Bastian, 27.2.2018

1	4	6	7	9	12	14	15	17	20	22	23	25	28	30	31
32	29	27	26	24	21	19	18	16	13	11	10	8	5	3	2

Bayhas, 27.2.2018

1	4	5	8	10	11	14	15
16	13	12	9	7	6	3	2

Bastian, 27.2.2018

1	5	9	17	21	31	39	40	44
24	16	33	7	15	13	23	41	35
28	27	34	26	12	6	37	19	18
30	38	3	43	25	45	2	11	10
32	29	36	22	42	20	14	4	8

Malte, 6.3.2018

1	4	5	7	11	12	13	15	18	19
20	17	16	14	10	9	8	6	3	2

Hendrik, 13.3.2018

1	2	5	9	10	12	14	17	18	19	21	22
24	23	20	16	15	13	11	8	7	6	4	3

Bastian, Hendrik, 13.3.2018

Ein wenig Systematik

Betrachten wir allgemein die Aufgabe, ein $m \times n$ Rechteck mit Zahlen zu füllen, so dass es magisch wird. Die Summe der Zahlen von 1 bis $m \cdot n$ beträgt:

$$k = 1 + 2 + 3 + \ldots + m \cdot n = \frac{1}{2} \cdot m \cdot n \cdot (m \cdot n + 1)$$

Damit man ein magisches Rechteck zusammensetzen kann, muss die Summenzahl k sowohl durch m als auch durch n teilbar sein. Die Spaltensumme im magischen $m \times n$ Rechteck muss nämlich $s = \frac{k}{n}$, die Zeilensumme $z = \frac{k}{m}$ ergeben.

Beispiel: Betrachten wir das Beispiel der 2×4 Rechtecke. Die Gesamtsumme der Zahlen in diesem Rechteck beträgt:

$$k_{2\times 4} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot (2 \cdot 4 + 1) = 36$$

Es ergeben sich die Spalten- und Zeilensummen:

$$s = \frac{36}{4} = 9 \qquad\qquad z = \frac{36}{2} = 18$$

Feststellung 3: Die Gesamtsumme $k_{m\times n}$ ist durch m und n teilbar, wenn m und n gerade Zahlen sind.[1]

Feststellung 4: Die Gesamtsumme $k_{m\times n}$ ist durch m und n teilbar, wenn sowohl m als auch n ungerade Zahlen sind. [2]

Feststellung 5: Ist eine der Zahlen m und n ungerade und die andere ist gerade, so gibt es keine Möglichkeit ein entsprechendes magisches Rechteck zu füllen.

Aufgabe 3: Beweise Feststellung 5.

Lösung 3: Ist m die ungerade Zahl, so ergibt sich für die Zeilensumme:

$$z = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot n \cdot (m \cdot n + 1)}{n} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m \cdot n + 1)$$

Da m ungerade und n gerade ist, ist $m \cdot n$ gerade. Daher ist $m \cdot n + 1$ eine ungerade Zahl, die mit m (ebenfalls ungerade) multipliziert ein ungerades Ergebnis hervorbringt. Multipliziert man dieses mit $\frac{1}{2}$ kann das Endergebnis (also z) keine ganze Zahl sein. Damit gibt es kein magisches Rechteck.
Mit gleicher Argumentation kann man zeigen, dass s keine ganze Zahl ist, wenn m gerade und n ungerade ist.

Magische $2 \times n$-Rechtecke

$2 \times n$-Rechtecke können magisch sein, wenn n eine gerade Zahl größer 2 ist. Die Spaltensummen betragen in diesem Fall: $s = n+1$, die Zeilensummen: $z = n^2 + \frac{n}{2}$. Um die Spaltensummen einzuhalten, sind für das $2 \times n$-Rechteck folgende Pärchen zu bilden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2n-2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix}$$

Man kann bei diesen Spaltenpärchen den größeren der beiden Werte unten notieren (wie in der Auflistung) oder man notiert den größeren Wert oben. Wir bezeichnen das i-te Pärchen als p_i, falls der kleinere Wert oben steht, als P_i wenn der größere Wert oben steht.

[1] Da es kein magisches 2×2 Quadrat gibt, wird deutlich, dass es nicht ausreicht, zu zeigen, dass s und z ganze Zahlen sind.

[2] Nach Feststellung 1 sollten für magische Rechtecke weder m noch n den Wert 1 annehmen, auch wenn Feststellung 4 auch in diesem Fall zutreffend wäre.

Beispiel: Wir betrachteten bereits das 2×4-Rechteck. Die einzige Lösung (bis auf Vertauschungen) ist (s.o.):

1	4	6	7
8	5	3	2

Dieses Rechteck ist also aus den folgenden Spaltenpärchen gebildet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Beim zweiten und dritten Pärchen haben wir die größere Zahl nach oben getauscht. Das magische Rechteck setzten wir also aus den Pärchen p_1, P_2, P_3, p_4 zusammen. Anschließend vertauschten wir die Pärchen noch nach der Sortierungsregel: p_1, p_4, P_3, P_2.

Konstruktion von $2 \times n$-Rechtecken Ist n ein Vielfaches von 4, kann man magische $2 \times n$-Rechtecke konstruieren. Dazu muss man folgende Regeln einhalten:

1. p_1 und p_n gehören zu den Pärchen.
2. Unter den ersten $\frac{n}{2}$ Symbolen kommen p und P gleich häufig vor.
3. Die Symbolkette ist achsensymmetrisch.

Beispiele: Den einfachsten Fall haben wir bereits betrachtet: Das 2×4-Rechteck: ich beginne mit Regel 1: p_1 (und p_4) gehören zu den Pärchen. Wegen Regel 2, gehört auch P_2 zu den Pärchen. Beachtet man Regel 3, so haben wir auch P_3 aufzunehmen und wir gelangen zur Pärchenkette: p_1, P_2, P_3, p_4.
Interessante wird der Fall für das 2×8-Rechteck: Wieder beginnen wir mit p_1. Unter den ersten vier Pärchen darf ein weiteres Pärchen sein, dessen oberer Wert kleiner als der untere ist. Das kann p_2, p_3 oder p_4 sein. Die jeweils anderen Pärchen müssen den größeren Wert oben tragen. Wir erhalten also drei Möglichkeiten, die nach Regel 3 eindeutig vervollständigt werden können: (1) $p_1, p_2, P_3, P_4, P_5, P_6, p_7, p_8$ (2) $p_1, P_2, p_3, P_4, P_5, p_6, P_7, p_8$ (3) $p_1, P_2, P_3, p_4, p_5, P_6, P_7, p_8$ (4) $p_1, P_2, P_3, p_4, p_5, P_6, P_7, p_8$ Man erhält damit die magischen Rechtecke:

1	2	7	8	11	12	13	14
16	15	10	9	6	5	4	3

1	3	6	8	10	12	13	15
16	14	11	9	7	5	4	2

1	4	5	8	10	11	14	15
16	13	12	9	7	6	3	2

1	4	5	8	10	11	14	15
16	13	12	9	7	6	3	2

Aufgabe 4 Die vier gelisteten 2×8-Rechtecke sind die einzigen, die sich nach dem obigen Regelkatalog zusammenstellen lassen. Ich vermute aber, dass es weitere magische 2×8-Rechtecke gibt. Finde ein solches oder widerlege die Vermutung.

Aufgabe 5 Du hast eine Balkenwaage und folgende Gewichte: 1 kg, 3 kg, 5 kg, 7 kg, 9 kg, 11 kg, 13 kg, 15 kg. Verteile alle Gewichte so auf die beiden Waagschalen, dass die Waage im Gleichgewicht ist. Versuche auch Folgendes: Verteile alle Gewichte auf die Waagschalen, dass die Waage im Gleichgewicht ist und sich auf den Waagschalen unterschiedlich viele Gewichte befinden.

Lösung 5. . . und Lösung 4 Für Aufgabe 5 gibt es im Prinzip die folgenden drei Lösungen: (15,13,3,1|5,7,9,11); (15,11,5,1|3,7,9,13); (15,9,7,1|3,5,11,13): Die vier Gewichte auf jeder Waagschale ergeben in jedem Fall zusammen das Gewicht von 32 kg. Natürlich könnte man die Beladung der Waagschalen auch tauschen und hätte damit drei weitere Lösungen, aber richtig neue Lösungen wären das ja nicht.
Die Lösung 5 verweist auch auf die magischen 2×8-Rechtecke. Um das zu verstehen, muss man die Spaltenpärchen von oben betrachten. Die Differenzen zwischen dem größeren und kleineren Wert der Pärchen betragen: 1,3,5,7,9,11,13 und 15. Das sind genau die Zahlen, die wir in Aufgabe 5 als Gewichte vorgesehen haben. Finden wir das Gewicht in der Lösung 5 auf der linken Waagschale, bedeutet dies für das 2×8-Rechteck, dass wir das Spaltenpärchen mit der entsprechenden Differenz aussuchen und so anordnen, dass der kleinere Wert oben ist. Für jedes Gewicht auf der rechten Waagschale, wird das Spaltenpärchen mit der Differenz so gestaltet, dass der größere Wert oben ist.
Durch den Vergleich mit dem Waagschalenproblem finden wir aber heraus, dass die in Aufgabe 4 geäußerte Vermutung falsch war. Außer den oben festgehaltenen sechs Zahlenkombinationen gibt es keine weiteren Zusammenstellungen der Gewichtszahlen, deren Summe 32 ergeben würden.
Für alle Kombinationen aus vier Gewichtszahlen genügt es alle Zusammenstellungen mit der Zahl 15 zu untersuchen. 15 kann man mit 13, 11 oder 9 kombinieren. Man erhält dann aber die oben notierten Quartette. Kombiniert man 15 mit 7, so muss man noch ein Pärchen Gewichtszahlen mit der Summe 10 ergänzen. Dies kann nicht (5,5) sein, da es nur eine 5 gibt und auch nicht (7,3), da die 7 bereits genutzt wird. Mit dem Pärchen (9,1) landet man wieder bei der bereits bekannten Kombination (15,9,7,1).
Eine Dreierkombination kann es auch nicht geben, weil drei Gewichtszahlen immer eine ungerade Summe, also keinesfalls 32, haben. Für eine Zweierkombination reicht die Summe der höchten Gewichtszahlen (15 und 13) nicht aus, um 32 zu erreichen. Aus diesem Grund kann es auch keine Sechserkombination mit Summe 32 geben, da dies verlangen würde, dass eine Zweierkombination übrigbleibt, deren Zahlen zusammen 32 ergeben.

Magische 2×6-Rechtecke

Da unser Regelkatalog verlangte, dass die Spaltenzahl ein Vielfaches von 4 sein sollte, haben wir bislang magische 2×6-Rechtecke nicht untersucht. Mithilfe des Waagschalenproblems soll dies nun nachgeholt werden. In diesem Kontext lautet das Problem:

> Finde unter den Zahlen 1,3,5,7,9,11 eine Gruppe, deren Summe genau 18 beträgt.

Dies ist möglich z.B.: (11,7) mit der Restgruppe (1,3,5,9). Das entsprechende magische Rechteck ist:

1	**3**	**7**	**8**	**9**	**11**
12	**10**	**6**	**5**	**4**	**2**

Das ist auch die einzige Lösung des Problems. Es gibt (bis auf Vertauschungen von Zeilen oder Spalten) kein weiteres 2×6-Rechteck.

Magische 2×10-Rechtecke

Für magische 2×10-Rechtecke lautet das Waagschalenproblem:

> Finde unter den Zahlen 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19 Gruppen, deren Summen genau 50 betragen.

Beschränkt man sich auf die jeweils auf die Gruppen, die die Zahl 19 enthalten (vernachlässigt man also die Restgruppen), so findet man zehn solche Gruppen[3]:

19,17,13,1	19,17,11,3	19,17,9,5	19,15,13,3	19,13,9,5,3,1
19,15,11,5	19,15,9,7	19,13,11,7	19,15,7,5,3,1	19,11,9,7,3,1

Die entsprechenden Rechtecke sind:

1	2	4	10	12	13	14	15	16	18
20	19	17	11	9	8	7	6	5	3

1	2	5	9	11	13	14	15	17	18
20	19	16	12	10	8	7	6	4	3

1	2	6	8	11	12	14	16	17	18
20	19	15	13	10	9	7	5	4	3

1	3	4	9	11	13	14	15	16	19
20	18	17	12	10	8	7	6	5	2

1	3	5	8	11	12	14	15	17	19
20	18	16	13	10	9	7	6	4	2

1	3	6	7	11	12	13	16	17	19
20	18	15	14	10	9	8	5	4	2

1	3	7	8	9	10	15	16	17	19
20	18	14	13	12	11	6	5	4	2

1	4	5	7	11	12	13	15	18	19
20	17	16	14	10	9	8	6	3	2

1	4	6	8	9	10	14	16	18	19
20	17	15	13	12	11	7	5	3	2

1	5	6	7	9	10	13	17	18	19
20	16	15	14	12	11	8	4	3	2

[3] Zunächst fand ich nur sieben, dann war ich überzeugt, dass es acht gibt

Das Gewichtszahlenproblem

Nehmen wir an, Du sollst das Waagschalenproblem lösen, hast aber das Problem, dass die Gewichte zwar unterschiedlich schwer sind, sich optisch aber schwer unterscheiden lassen. Eine Lösung könnte sein, die Gewichte zu markieren. Man könnte zum Beispiel die Gewichte vom leichtesten bis zum schwersten durchnumerieren:

Gewicht	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
	x	x		x						x
Nummer	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Die Kreuze markieren eine Lösung für das Waagschalenproblem. Vier Gewichte (19, 17, 13, 1) gleichen die sechs übrigen Gewichte (15, 11, 9, 7, 5, 3) aus. In Gewichtszahlen stehen sich gegenüber: (10, 9, 7, 1) und (8, 6, 5, 4, 3, 2). Die Summen der beiden Zahlenmengen sind nicht gleich. Wir haben zum einen die Summe 27, zum anderen die Summe 28. Anders als im Waagschalenproblem muss im Gewichtszahlenproblem auch die Anzahl der Gewichte (bzw. der Zahlen) berücksichtigt werden. Das Waagschalenproblem für das 2×10-Problem lässt sich umformulieren in das Gewichtszahlenproblem:

> Finde unter den Gewichtszahlen 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 vier Zahlen, die zusammen 27 oder sechs Zahlen, die zusammen 28 ergeben.

Wie kommt man auf die Werte 27 und 28? Betrachten wir dazu die obigen Tabelle. Von den Werten in der ersten Zeile gelangt zu den Werten der dritten Zeile, indem man zu den Werten 1 addiert und anschließend durch 2 teilt. So berechnet man, dass das Gewicht von 11 kg die Indexzahl 6 hat (denn $(11+1):2=6$).
Hat man im Waagschalenproblem vier Gewichte gefunden, die zusammen 50 ergeben $a+b+c+d=50$, kann man auch deren Indexzahlen zusammenrechnen:

$$\frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c+1}{2}+\frac{d+1}{2}=\frac{a+1+b+1+c+1+d+1}{2}=\frac{a+b+c+d+4}{2}$$

Die Summe $a+b+c+d$ ist bekannt (sie ist 50) und daher ist die Summe der Indexzahlen $\frac{50+4}{2}=27$. Die 4, die zu der 50 hinzuzuzählen war, ergab sich aus der Anzahl der Gewichte. Bei sechs Gewichten ergibt sich eine andere Summenzahl: $\frac{50+6}{2}=28$.
Will man garantieren, dass das zehnte Gewicht (19 kg) bei der Auswahl dabei ist, kann man auch die Aufgabe formulieren:

> Finde unter den Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8,9 drei Zahlen, die zusammen 17 oder fünf Zahlen, die zusammen 18 ergeben.

Rückübersetzung für die magischen Rechtecke Wir haben nun das Problem zwei Mal umformuliert. Es ist dadurch mathematisch einfacher geworden, aber es wird schwieriger die Übersicht zu bewahren. Die Regeln zur Erstellung eines magischen $2 \times n$-Rechtecks lassen sich so zusammenfassen:

1. Bilde die Spaltenpaare:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2n-2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix}$$

2. Bilde die Zahlenmenge
$$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$$
3. Wähle aus der Zahlenmenge k Zahlen, die die Summe $\frac{n^2+2k}{4}$ ergeben (k muss dabei eine gerade Zahl zwischen 2 und n sein). n muss mit zur Auswahl gehören.
4. Bilde zu dieser Auswahl jeweils die Zahlen, die die Werte der Auswahl zu $n+1$ ergänzen.
5. Die Spaltenpaare werden umgedreht, wenn sie keine der im letzten Schritt bestimmten Zahlen enthalten.
6. Es wird nach der Sortierungsregel sortiert.

Beispiel Wir konstruieren ein magisches 2×12-Rechteck. n ist also 12.

1. Wir bilden die Spaltenpaare:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13

2. Nun setzen wir die Zahlenmenge zusammen:
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$
3. Wir wählen nun vier Zahlen aus, deren Summe 38 ergibt, denn
$$\frac{n^2+2k}{4} = \frac{144+4}{4} = 38$$
Wir wählen $12, 11, 9, 6$.
4. Um diese Zahlen jeweils zu 13 zu ergänzen, braucht man $1, 2, 4, 7$
5. Entsprechend drehen wir alle Spaltenpaare bis auf das erste, das zweite, das vierte und siebte um (nicht umgedreht werden die Spaltenpaare mit den Werten $1, 2, 4$ und 7):

1	2	22	4	20	19	7	17	16	15	14	13
24	23	3	21	5	6	18	8	9	10	11	12

6. Wir sotieren nach der Sortierungsregel:

1	2	4	7	13	14	15	16	17	19	20	22
24	23	21	18	12	11	10	9	8	6	5	3

Ich habe bislang (ohne Spalten- und Zeilenvertauschungen) 34 magische 2×12-Rechtecke gefunden. Davon sind 4, bei denen 4 Spalten nicht umgedreht werden, es sind 29 mit 6 umgedrehten und 6 gleichbleibenden Spalten und eine Lösung, bei der 8 Spalten bleiben und 4 auf den Kopf gestellt werden.

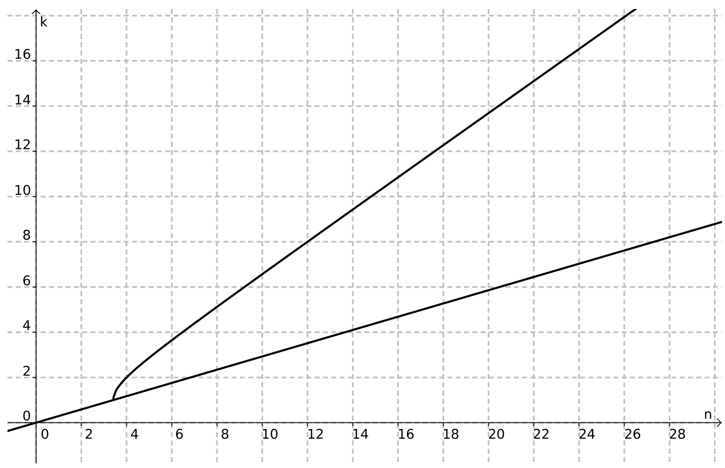
Vergleich der Konstruktionsrezepte

Mit dem letzten Rezept haben wir drei Strategien, $2 \times n$-Rechtecke zu erstellen. Dabei sind jeweils aus einer Zahlenmenge eine bestimmte Anzahl Werte zu kombinieren, deren Summe eine vorgegebene Zielzahl ergibt.

Rezept	Zahlenmenge	Anzahl Werte	Zielzahl
Originalproblem	$\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$	n	$\frac{1}{2}n \cdot (2n+1)$
Waagschalenproblem	$\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$	$2, 4, 6, \dots, n$	$\frac{1}{2}n^2$
Gewichtszahlenproblem	$\{1, 2, 3, \dots, n\}$	2	$\frac{1}{4}(n^2+4)$
		4	$\frac{1}{4}(n^2+8)$
		6	$\frac{1}{4}(n^2+12)$
		$\vdots$	$\vdots$

Wie in der Tabelle zu sehen ist, wird das Problem von Übersetzung zu Übersetzung mathematisch zunehmend einfacher. Zumindest in der Hinsicht, dass die Zielzahlen immer kleiner werden.

Ebenso wird die Anzahl zu wählender Werte (3. Spalte) kleiner. Allerdings ist sie beim Waagschalen- und Gewichtszahlenproblem variabel. Dies ist allerdings kein gewaltiger Nachteil, da – abhängig von n – nicht allzu viel Werte für diese Größe in Frage kommen.



Man kann das in der Abbildung oben ablesen. Dazu sucht man zunächst auf der x-Achse den Wert aus, der der Größe des magischen Rechtecks entspricht, das man konstruieren will. Möchte man zum Beispiel ein magisches 2×12-Rechteck zusammensetzen, so geht man auf der x-Achse zum Wert 12.

Auf der y-Achse sind die Wertezahlen abgetragen. Wenn man vom Punkt $(12|0)$, den wir uns gerade ausgesucht haben auf der gestrichelten Linie senkrecht nach oben geht, passiert man nacheinander die Wertezahlen 2, 4, 6, 8, 10 und so weiter. Man erkennt, dass man eine Wertezahl erreicht hat daran, dass man zu einem Gitterpunkt kommt. Alle Gitterpunkte entsprechen also möglichen Wertezahlen. Nun muss man die beiden Kurven betrachten. Gitterpunkte (und damit Wertezahlen) sind nur gültig, wenn sie zwischen den beiden Kurven liegen. Den Wert

2 muss man also verwerfen, denn ihn passiert man, bevor die untere Kurve überquert wird. 4 ist allerdings eine gültige Wertezahl, ebenso wie 6 (oberhalb der unteren Kurve). Die 8 liegt auf der zweiten Kurve. Sie ist damit eine gültige Wertezahl, wohingegen alle Gitterpunkte mit einer y-Koordinate, die größer ist als 8, keine gültigen Wertezahlen symbolisieren.
Man erhält also in Abhängigkeit von n die folgenden gültigen Wertanzahlen:

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
k	–	2	2	4	2,4	4,6,8	6,8	6,8,10	6,8,10,12	6,8,10,12

Magische 2×12-Rechtecke

Magische $2 \times n$-Rechtecke

Die Reihe magischer $2 \times n$-Rechtecke haben wir nun bis zu einer Größe untersucht, bei der es schwierig ist, die Übersicht zu behalten. Wir stießen auf folgende Anzahlen echt verschiedener Lösungen:

Größe	2×2	2×4	2×6	2×8	2×10	2×12
Anzahl Lösungen	0	1	1	4	10	34

Die Folge der Zahlen 0,1,1,4,10,34,... ist im Verzeichnis OEIS unter der Nummer `A156700` geführt und besitzt folgende Fortsetzung:

Größe	2×14	2×16	2×18	2×20	2×22	2×24
Anzahl Lösungen	103	346	1153	3965	13746	48396

Bei OEIS wird die Folge beschrieben als:

> Number of partitions of the set of odd numbers $\{1, 3, 5, \ldots, 4 \cdot n - 1\}$ into two subsets with equal sum.

Das beschreibt genau unser Waagschalenproblem.

Magische 4×8-Rechtecke

Mit den bisher vorgestellten Methoden kann man auch Rechtecke mit höheren Zeilenzahlen erzeugen. Im Folgenden wird das für 4×8-Rechtecke illustriert:
Wir beginnen mit einem 2×8-Rechteck:

1	2	7	8	11	12	13	14
16	15	10	9	6	5	4	3

Wir setzen noch ein 2×8-Rechteck darunter (das kann ruhig auch das gleiche sein):

1	2	7	8	11	12	13	14
16	15	10	9	6	5	4	3
1	2	7	8	11	12	13	14
16	15	10	9	6	5	4	3

Nun wird zu den Einträgen der unteren Hälfte 16 addiert:

1	**2**	**7**	**8**	**11**	**12**	**13**	**14**
16	**15**	**10**	**9**	**6**	**5**	**4**	**3**
17	**18**	**23**	**24**	**27**	**28**	**29**	**30**
32	**31**	**26**	**25**	**22**	**21**	**20**	**19**

Wir haben nun ein Rechteck, in dem die Zahlen von 1 bis 32 stehen und dessen Spaltensummen jeweils 66 betragen. Allerdings sind die Zeilensummen in der oberen Hälfte um 128 größer als in der unteren Hälfte.
Wir vertauschen nun in bestimmten Spalten die Pärchen aus der unteren Hälfte mit den Pärchen aus der oberen Hälfte. Es ist nur zu klären, in welchen Spalten dies geschehen soll. Hierzu können wir uns aber auf die Vertauschungsregeln beziehen, die wir für die 2×8-Rechtecke entwickelt haben. Bei einem $2 \times n$-Rechteck erkennen wir vertauschte Spalten daran, dass der obere Wert größer ist als der untere. Dies ist beim betrachteten Rechteck in den Spalten fünf bis acht der Fall. Wir vertauschen im 4×8-Rechteck also in den letzten vier Spalten die Spaltenpaare:

1	**2**	**7**	**8**	**27**	**28**	**29**	**30**
16	**15**	**10**	**9**	**22**	**21**	**20**	**19**
17	**18**	**23**	**24**	**11**	**12**	**13**	**14**
32	**31**	**26**	**25**	**6**	**5**	**4**	**3**

Wenn man in diesem Verfahren Rechtecke verwendet, die der Sortierungsregel genügen, entspricht auch das Endergebnis der Sortierungsregel.
Zur Konstruktion des 4×8-Rechtecks haben wir drei Mal die Struktur eines 2×8-Rechtecks angewendet. Im obigen Beispiel haben wir jedes Mal am Rechteck orientiert, das auf Seite 5 ganz oben steht. Man kann genauso gut unterschiedliche Rechtecke verwenden, zum Beispiel nacheinander die drei Rechtecke, die auf Seite 5 unten aufgeführt sind. Damit gelangt man dann zum Ergebnis:

1	**3**	**6**	**8**	**26**	**27**	**30**	**31**
16	**14**	**11**	**9**	**23**	**22**	**19**	**18**
17	**20**	**21**	**24**	**10**	**12**	**13**	**15**
32	**29**	**28**	**25**	**7**	**5**	**4**	**2**

Aufgabe 6: Bestimme die Anzahl der magischen 4×8-Rechtecke, die man auf diese Art und Weise konstruieren kann. Gibt es weitere Lösungen?

Lösung 6: Das Verfahren sieht vor, dass an drei Punkten entschieden werden muss, von welchem 2×8-Rechteck ich die Struktur übernehmen möchte. Da 4 unterschiedliche Rechtecke zu Verfügung stehen, ist die Anzahl verschiedener Kombinationen $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Man müsste nun überlegen, ob unterschiedliche Kombinationen zu gleichen 4×8-Rechtecken führen können. Dies ist aber nicht der Fall.
Die so erzeugten magischen 4×8-Rechtecke haben eine besondere Struktur: Die Zahlen aller Spaltenpaare in der unteren und oberen Rechteckhälfte addieren sich zu 17 oder 49. Ein magisches 4×8-Rechteck muss diese besondere Struktur nicht aufweisen. Es gibt also weitere Lösungen. Spekulieren lässt sich auch über die Frage, welches Rechteck mit 32 Feldern

"einfacher" zu füllen ist: Das 4×8-Rechteck oder das 2×16-Rechteck. Anders gefragt, für welche Struktur gibt es mehr Lösungsmöglichkeiten. Wir oben dargestellt, gibt es 346 echt unterschiedliche magische 2×16-Rechtecke. Liegt nun die Anzahl magischer 4×8-Rechtecke darüber oder darunter?

3×5-Rechtecke

Nachdem wir bislang die erste Klasse magischer Rechtecke betrachtet haben, nämlich die mit gerader Spalten- und Zeilenzahl, wenden wir uns nun der anderen Klasse zu, also den Rechtecken, bei denen Spalten- und Zeilenzahl ungerade sind.
Durch Ausprobieren fand ich:

1	**4**	**8**	**12**	**15**
9	**7**	**11**	**10**	**3**
14	**13**	**5**	**2**	**6**

1	4	8	12	15
9	13	5	10	3
14	7	11	2	6

1	2	11	12	14
10	7	8	9	6
13	15	5	3	4

1	4	8	12	15
10	14	11	3	2
13	6	5	9	7

Versuchen wir die Konstruktionen etwas zu systematisieren: Betrachtet man die bisherigen Lösungen, so fällt auf, dass die Zahlen 1 bis 5 auf verschiedene Spalten verteilt sind. Das ist nicht ganz zufällig. Um die notwendige Spaltensumme von 18 zu erreichen, müssen die fünf kleinsten Zahlen verteilt werden. Die einzige Möglichkeit zwei Zahlen dieser Gruppe in einer Spalte aufzunehmen, wäre eine Spalte mit den Zahlen 4,5,15 (diesen Fall betrachten wir unten gesondert).

die Spaltenköpfe können wir also mit 1 bis 5 belegen. Ähnlich kann man argumentieren, dass die Zahlen 11 bis 15 über die Spalten verteilt sein müssen (Ausnahme: 1, 11, 12 s.u.).

Wir müssen also den Spaltenköpfen 1 bis 5 die Zahlen 11 bis 15 zuweisen, ohne dass zwei gleiche Summen auftreten. Außerdem können der 1 weder 11 noch 12 zugeordnet werden, der 2 keine 11, der 4 keine 15, der 5 weder 14 noch 15.

Ausgehend hiervon kann man durch vielfältige Fallunterscheidungen (und mit Rechners Hilfe) 34 Konstellationen isolieren, die auf der Folgeseite zusammengefasst sind.

1	2	9	13	15
11	14	5	4	6
12	8	10	7	3

1	2	11	12	14
8	9	10	7	6
15	13	3	5	4

1	2	11	12	14
10	15	8	3	4
13	7	5	9	6

1	3	8	13	15
9	11	12	6	2
14	10	4	5	7

1	3	10	11	15
9	8	12	7	4
14	13	2	6	5

1	4	8	12	15
10	14	5	9	2
13	6	11	3	7

1	4	10	12	13
8	14	11	5	2
15	6	3	7	9

1	5	7	12	15
9	11	4	10	6
14	8	13	2	3

1	5	10	11	13
9	4	12	7	8
14	15	2	6	3

1	6	8	10	15
11	4	13	5	7
12	14	3	9	2

1	6	9	10	14
8	13	4	12	3
15	5	11	2	7

1	2	9	13	15
11	14	5	7	3
12	8	10	4	6

1	2	11	12	14
8	13	10	5	4
15	9	3	7	6

1	3	7	14	15
10	12	6	8	4
13	9	11	2	5

1	3	9	13	14
11	15	5	7	2
12	6	10	4	8

1	4	8	12	15
9	7	11	10	3
14	13	5	2	6

1	4	8	12	15
10	14	11	3	2
13	6	5	9	7

1	5	6	13	15
11	10	4	8	7
12	9	14	3	2

1	5	9	11	14
8	12	13	3	4
15	7	2	10	6

1	6	8	10	15
9	11	3	12	5
14	7	13	2	4

1	6	8	10	15
11	14	3	5	7
12	4	13	9	2

1	7	8	9	15
10	11	2	12	5
13	6	14	3	4

1	7	8	10	14
11	15	3	5	6
12	2	13	9	4

1	2	10	13	14
11	15	5	3	6
12	7	9	8	4

1	2	11	12	14
10	7	8	9	6
13	15	5	3	4

1	3	7	14	15
10	12	11	2	5
13	9	6	8	4

1	3	10	11	15
9	8	12	6	5
14	13	2	7	4

1	4	8	12	15
9	13	5	10	3
14	7	11	2	6

1	4	9	11	15
10	6	12	5	7
13	14	3	8	2

1	5	6	13	15
11	10	14	3	2
12	9	4	8	7

1	5	9	11	14
10	4	12	6	8
13	15	3	7	2

1	6	8	10	15
9	11	13	2	5
14	7	3	12	4

1	6	8	12	13
9	3	11	10	7
14	15	5	2	4

1	7	8	9	15
11	4	14	5	6
12	13	2	10	3