Nim-Spiele

Standard-Nim

Talea, Adam, Finn	3.2019

Emily, Julia, Ann-Kathrin, Konstantin Christian, Malte, Bastian	3.2019

Bei Numberphile wird in einem Film eine Variante des Nim-Spiels[1] vorgestellt. Wir nennen sie hier *Standard-Nim*:

> **Standard-Nim:** Auf dem Tisch liegen 12 Münzen. Zwei Spieler nehmen abwechselnd eine, zwei oder drei Münzen weg. Wer die letzte Münze nimmt, gewinnt.

Wenn man das Spiel ein paar Mal gespielt hat, findet man heraus, dass der Spieler, der als zweiter am Zug ist, immer gewinnen wird, wenn er die richtige Strategie kennt.
Um die Gewinn-Strategie herauszufinden, versuchen wir das Nim-Spiel rückwärts zu spielen. Wenn im Verlauf des Spiels die letzten Münzen auf dem Tisch liegen, kennen wir den Ausgang des Spiels. Wir wissen: Finden wir auf dem Tisch nur eine, zwei oder drei Münzen vor, so gewinnt der Spieler, der am Zug ist, indem er alle Münzen nimmt. In einem Bild können wir das so darstellen.

1	2	3

Die Zahl in den Felder steht für die auf dem Tisch liegenden Münzen. Die grüne Farbe besagt: Der Spieler, der jetzt am Zug ist, wird das Spiel gewinnen.
Wir überlegen nun, was passiert, wenn vier Münzen auf dem Tisch liegen. Der Spieler am Zug kann nicht alle Münzen vom Tisch nehmen, dafür sind es zu viele. Wenn er aber eine erlaubte Zahl von Münzen (1,2 oder 3) nimmt, dann liegen anschließend drei, zwei oder eine Münzen auf den Tisch und der Gegenspieler kann das Spiel in einem Zug für sich entscheiden.
In unserem Symbolbild können wir die Argumentation nachvollziehen:

1	2	3	4

Vom grauen Feld 4 aus kann man die blau umrahmten Felder erreichen (wenn vier Münzen auf dem Tisch liegen, werden nach dem Zug, 1 oder 2 oder 3 Münzen übrigbleiben). Alle diese Varianten erlauben dem nächsten Spieler zu gewinnen (grüne Farbe). Der Spieler, der am Zug ist, wenn vier Münzen auf dem Tisch sind, muss seinem Spieler also den Sieg überlassen. Entsprechend färben wir das Vierer-Feld rot ein:

1	2	3	4

Um das Spiel weiter zu untersuchen, betrachten wir nun das Fünfer-Feld:

[1]Den Namen Nim hat sich Charles Bouton ausgedacht, der das Spiel bereits 1901 untersuchte. Was sich Bouton gedacht hat, als er dem Spiel diesen Namen gab, weiß ich nicht.

1 2 3 4 5

Wieder sind die erreichbaren Felder eingefärbt. Ein erreichbares Feld ist rot. Ich kann den Gegenspieler zwingen, zu verlieren, indem ich auf dieses Feld spiele.

> Auf dem Tisch liegen fünf Münzen. Wie viele dieser Münzen muss ein Spieler entfernen, um zu gewinnen?

Da der Spieler am Zug mit der richtigen Strategie gewinnen wird, wenn fünf Münzen auf dem Tisch liegen, erhält das Fünfer-Feld eine grüne Farbe:

1 2 3 4 5

Ebenso verhält es sich mit dem Sechser- und Siebener-Feld:

1 2 3 4 5 6 7

Interessanter ist das Achter-Feld. Durch Markieren der erreichbaren Felder können wir beurteilen, wer das Nim-Spiel gewinnt, wenn acht Münzen auf dem Tisch liegen:

1 2 3 4 5 6 7 8

Keines der markierten Felder ist rot. Ich kann also auf kein Feld spielen, das den Gegner zum Verlieren zwingt. Das Achter-Feld ist also für den Spieler am Zug ein ungünstiges (also rotes) Feld.

1 2 3 4 5 6 7 8

Die komplette Untersuchung des Nim-Spiels führt zur folgenden Darstellung:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Wir erkennen an der Rotfärbung des Zwölfer-Felds: Das Nim-Spiel mit zwölf Münzen ist für den beginnenden Spieler nicht zu gewinnen (es sei denn, sein Gegner macht Fehler). Wir sehen aber auch, wie die Gewinnstrategie aussieht:

> Spiele immer so, dass Du dem Gegner eine Spielsituation hinterlässt, die einem roten Feld entspricht.

Beim betrachteten Nim-Spiel bedeutet das:

> Nimm immer so viel Münzen weg, dass eine durch 4 teilbare Zahl von Münzen auf dem Tisch zurückbleibt.

Nicht-Nachmachen-Nim

Wir haben uns anschließend Varianten des Spiels ausgedacht. Bei der untersuchung dieser Spiele kann man die Stärke der bildlichen Darstellung noch besser nutzen.

Nicht-Nachmachen-Nim: Gespielt wird wie Standard-Nim. Wieder darf jeder Spieler grundsätzlich ein oder zwei oder drei Münzen entfernen. Wir führen aber eine Zusatzregel ein: Ein Spieler darf nicht den vorangegangenen Zug seines Gegners wiederholen. Nimmt ein Spieler zwei Münzen, darf der Gegner im nächsten Zug also nicht ebenfalls zwei Münzen nehmen, sondern hat nur die Wahl, eine oder drei Münzen zu entfernen.

Durch diese Zusatzregel wird das Nim-Spiel interessanter. Spielt man ein wenig nach diesen Regeln, wird man aber feststellen, dass das Spiel „steckenbleiben" kann: Liegen noch zwei Münzen auf dem Tisch und der Spieler am Zug entfernt eine davon, dann bleibt eine Münze liegen. Der Spieler der nun ziehen darf, kann diese Münze nicht entfernen, denn dann würde er den Zug des Gegners wiederholen, aber er kann auch keinen andere Zahlvon Münzen wegnehmen, da ja nur eine Münze da liegt.
Man kann diese Situation unterschiedlich regeln. Hier betrachten wir zunächst die Spielvariante 1:

Nicht-Nachmachen-Nim (1): Gespielt wird Nicht-Nachmachen-Nim (siehe oben). Es gilt die Zusatzvereinbarung, dass ein Spieler die letzte verbleibende Münze vom Tisch nehmen darf, auch wenn der Gegner im vorherigen Zug ebenfalls eine Münze genommen hat.

Ich habe behauptet, dass Nicht-Nachmachen-Nim interessanter ist als Standard-Nim. Das macht man in der Mathematik gerne, wenn man nicht zugeben will, dass die Untersuchung komplizierter geworden ist(aber in Mathe++ ist komplizierter ja immer interessanter, oder?). Komplizierter wird die Lage dadurch, dass ich den Zustand eines Spiels nicht mehr dadurch beschreiben kann, dass ich sage, wie viele Münzen auf dem Tisch liegen. Eine weitere wichtige Information ist nun, wie viel Münzen der Gegner im letzten Zug weggenommen hat.
Das wird klar, wenn ich ein Spiel betrachte, bei dem noch drei Münzen auf dem Tisch liegen. Wer gewinnt dieses Spiel? Zunächst glaubt man, dass der Spieler am Zug gewinnen muss, schließlich kann er die drei Münzen ja nehmen. Möglicherweise ist der Zug aber geblockt, weil der Gegner gerade drei Münzen genommen hat. In diesem Fall verliert der Spieler am Zug.
Wir brauchen also eine Darstellung, die beide Informationen (Wie viele Münzen liegen auf dem Tisch? Welcher Zug ist geblockt?) enthält. Wie wäre es damit:

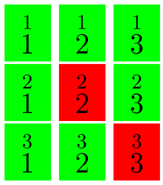
$$\begin{array}{c} {\scriptstyle 2} \\ 4 \end{array}$$

Das ist das Feld für die Spielsituation *Vier Münzen liegen auf dem Tisch, zwei dürfen nicht weggenommen werden*.[2]
Untersuchen wir nun die ganz einfachen Spiele:
Unsere Sonderregel besagt:

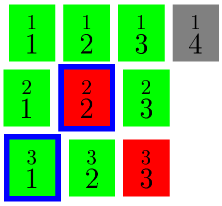
$$\begin{array}{c} {\scriptstyle 1} \\ 1 \end{array}$$

Durch ein wenig Überlegen kann man ergänzen:

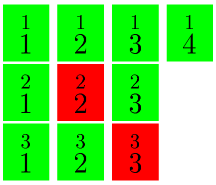
[2] Tatsächlich eine Situation, die der Spieler am Zug verliert.



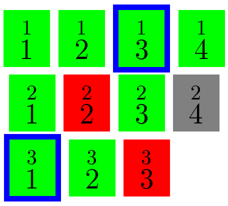
Wie im Standard-Nim versuchen wir nun unbekannte Spielsituationen zu untersuchen. Wie sieht es damit aus: *Vier Münzen liegen auf dem Tisch, der Gegner hat gerade eine Münze vom Tisch genommen.* Ich ergänze mein Schaubild durch ein 1-4-Feld und umrahme die Felder, die ich von dort erreichen kann.



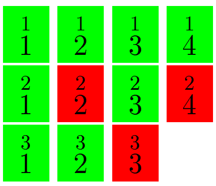
Wir sehen, dass der Spieler durch Entfernen von zwei Münzen ein rotes Feld erreichen kann. Dieser Zug zwingt also den Gegner zum Verlieren. Entsprechend färbe ich das 1-4-Feld grün:



Schauen wir uns nun das 2-4-Feld an (*Vier Münzen liegen auf dem Tisch, der Spieler darf nicht zwei nehmen*):

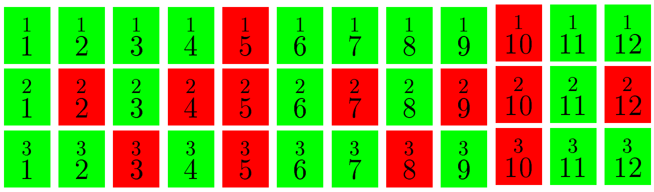


Der Spieler am Zug hat zwei Möglichkeiten. Entweder nimmt er eine Münze und landet im Schema auf dem 1-3-Feld (grün), oder er nimmt drei Münzen, wodurch er auf das 3-1-Feld (ebenfalls grün) gerät. Was der Spieler auch tut, er muss dem Gegner die Chance zu gewinnen überlassen. Das 2-4-Feld ist also rot.



> Zeige, dass das 3-4-Feld im Nicht-Nachmachen-Nim (1) ein grünes Feld ist. Wie viele Münzen muss der Spieler am Zug entfernen?

untersucht man weitere Felder, so bildet sich ein sich wiederholendes Muster heraus:



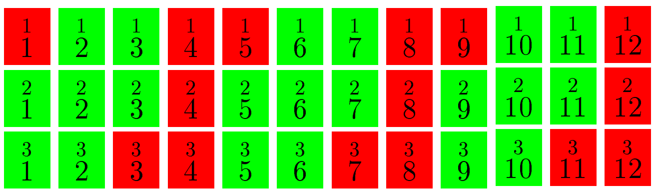
Als Gewinnstrategie kann man folgende Regel finden:

> Nimm so viele Münzen, dass auf dem Tisch eine durch 5 teilbare Anzahl von Münzen zurückbleibt. Sollte dies nicht möglich sein, so nimm zwei Münzen, falls es erlaubt ist. Wenn es nicht erlaubt ist, gibt es keine Gewinn-Strategie.

Wenn wir das Schema betrachten, dann erkennen wir, dass es ungünstig ist, eine Anzahl von Münzen auf dem Tisch zu hinterlassen, die auf 1 oder 6 endet. Jede Gewinnstrategie umgeht solche Züge. Gibt es für einen Spieler keine Gewinnstrategie sollte er diese Züge ebenfalls vermeiden und hoffen, dass der Gegner ihm durch einen Fehler noch einen Sieg ermöglicht.

> **Nicht-Nachmachen-Nim (2):** Gespielt wird Nicht-Nachmachen-Nim. Kann ein Spieler nicht ziehen, so setzt er aus. Keine Zugmöglichkeit hat der Spieler, wenn nur eine Münze auf dem Tisch liegt und der Einer-Zug geblockt ist, weil der Gegner gerade ein Münze weggenommen hat.

Im Vergleich zu Nicht-Nachmachen-Nim (1) haben wir die Sonderregel für das 1-1-Feld geändert. Der Spieler am Zug muss aussetzen, der Gegner kann den nun nicht mehr geblockten Zug ausführen und nimmt die letzte Münze vom Tisch. Dadurch wird das Feld von einem grünen Gewinnerfeld zu einem roten Verliererfeld. Lasst uns sehen, wie die Folgen für das gesamte Spiel sind.



Im Schema erkennt man wieder ein sich wiederholendes Muster. Allerdings wiederholt sich das Muster alle vier Felder und nicht alle fünf Felder wie bei Nicht-Nachmachen-Nim (1). Es ergibt sich unter anderem deswegen eine Strategie, die dem Standard-Nim ähnelt:

> Nimm immer so viel Münzen weg, dass eine durch 4 teilbare Zahl von Münzen auf dem Tisch zurückbleibt. Sollte dies nicht möglich sein, ist es egal, welchen Zug Du ausführst.

Beginnt man von einem roten Verliererfeld sollte man vermeiden eine gerade Zahl von Münzen auf dem Tisch zurückzulassen. So hat man noch die Chance, dass der Gegner einen Fehlzug macht und eine Gewinnmöglichkeit eröffnet.

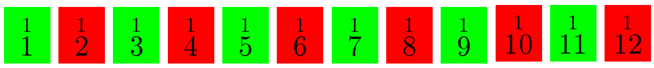
Nimm-nimmer-mehr-Nim

Eine andere Variante habe ich *Nimm-nimmer-mehr-Nim* genannt:

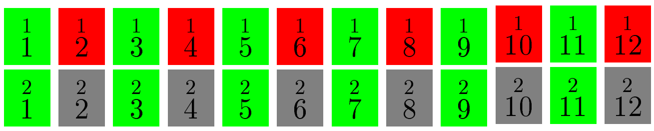
Nimm-nimmer-mehr-Nim: Auf dem Tisch liegt eine gewisse Anzahl von Münzen. Der erste Spieler darf beliebig viele Münzen nehmen, höchstens aber ein Drittel der Münzen. In jedem darauffolgenden Zug darf der Spieler, der an der Reihe ist, so viel Münzen vom Tisch nehmen, wie er mag, höchstens aber so viele wie sein Gegenspieler im vorangegangenem Zug genommen hat. Wer die letzte Münze nimmt, hat gewonnen.

> Zeige, dass der erste Spieler immer gewinnen wird, wenn die Anzahl der Münzen ungerade ist. Wie ist die Gewinnstrategie?

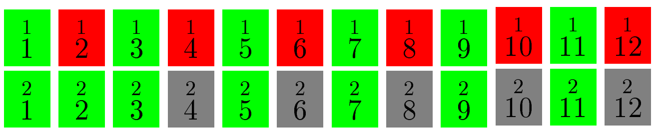
Bei einer ungeraden Anzahl von Münzen nimmt der Spieler, der am Zug ist, eine Münze weg. Nach den Regeln von Nimm-Nimmer-mehr-Nim liegen jetzt alle weiteren Züge fest: Die Spieler werden abwechselnd eine Münze nehmen. Dem Startspieler wird in disem Fall die letzte Münze zufallen und er wird gewinnen.
Wir stellen dieses Ergebnis bildlich dar. Aber Achtung: Wir beschreiben die Spielsituationen wieder durch zwei Zahlen. Die untere steht wieder für die Anzahl von Münzen auf dem Tisch, die obere ist hier aber die maximale Zahl von Münzen, die der Spieler am Zug höchstens wegnehmen darf:



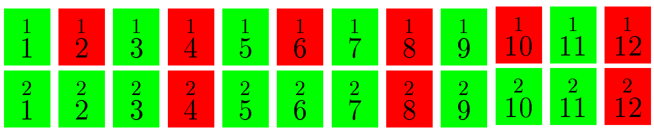
Es ist nicht so schwierig herauszufinden, was passieren wird, wenn der Spieler, der am Zug ist, bis zu 2 Münzen wegnehmen darf. Liegt eine ungerade Zahl von Münzen auf dem Tisch, kann der Spieler gewinnen, indem er eine Münze entfernt. Das haben wir oben schon kennengelernt.



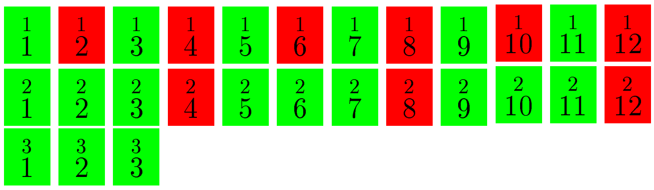
Auch das 2-2-Feld ist ein Gewinnerfeld. Der Spieler am Zug nimmt einfach beide Münzen weg und gewinnt sofort:



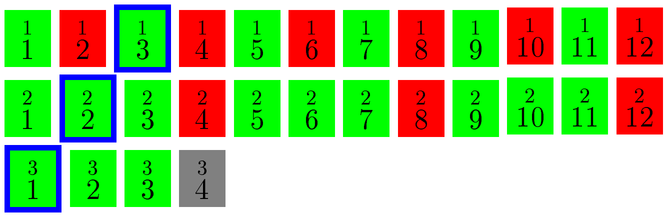
Liegen hingegen vier Münzen auf dem Tisch und der Spieler muss eine oder zwei Münzen entfernen, so hat er in jedem Fall verloren. Bei sechs Münzen ist die Situation dagegen wieder günstig, denn der Spieler kann den Gegner durch Wegnehmen von zwei Münzen auf das 2-4-Feld schicken, von dem wir jetzt wissen, dass es ein ungünstiges rotes Feld ist. Man findet heraus:



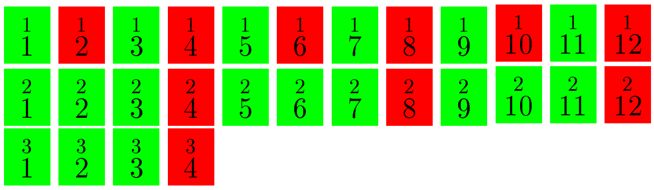
Wir ergänzen die dritte Zeile: Es geht um Spielsituationen, in denen der Spieler bis zu drei Münzen entfernen darf. Sind nicht mehr als drei Münzen auf dem Tisch, kann der Spieler sofort gewinnen:



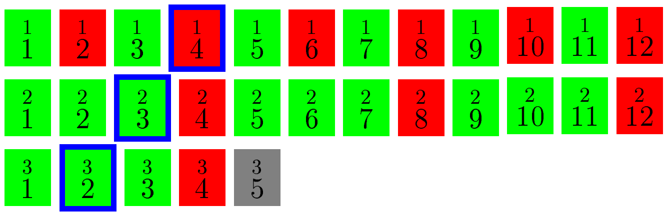
Nun überlegen wir über das 3-4-Feld. Ist es rot oder grün. Ich umrahme wieder die Felder, die vom 3-4-Feld erreichbar sind:



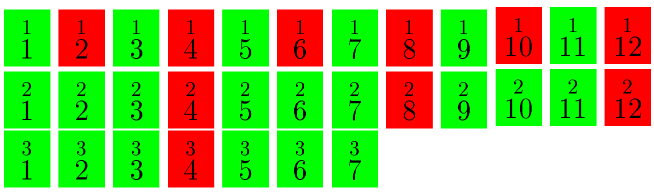
Die erreichbaren Felder liegen in einer Diagonalen, die in der Spalte vor dem 3-4-Feld oben beginnt (1-3-Feld) und sich dann nach links unten fortsetzt[3]. Alle markierten Feld sind grün: Der Spieler ist dazu gezwungen, dem Gegner ein Gewinnfeld zu überlassen. Demnach ist das 3-4-Feld ein rotes Verlierer-Feld.



Für das 3-5-Feld sind die erreichbaren Felder in der nächsten Darstellung markiert:

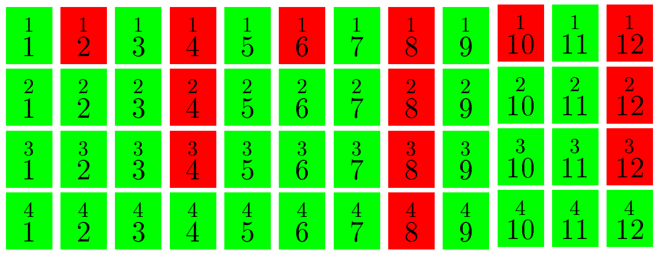


Bein ich am Zug, so steuere ich das Spiel auf das 1-4-Feld: Ich nehme also von den fünf auf dem Tisch liegenden Münzen eine und werde gewinnen.
Auch von den zwei nächsten Feldern (3-6 und 3-7) ist eines der roten Felder in der vierten Spalte zu erreichen. Für die Strategie heißt das: Ich nehme so viele Münzen weg, dass vier Münzen übrig bleiben.



[3]Im Prinzip war das bei Nicht-Nachmachen-Nim auch so, nur dass es dort nicht gestattet war, ein Feld in der gleichen Zeile anzusteuern.

Auf die gezeigte Weise kann man das Schema vervollständigen:



Eine Strategie für Nimm-nimmer-mehr-Nim ist nicht so einfach zu formulieren. Ich versuche es so:

> Wenn Du mehrere Zugmöglichkeiten hast, dann überlege welche Münzzahlen Du jeweils zurücklassen würdest. Wähle die Münzzahl aus, die durch die größte Zweierpotenz[4] teilbar ist.

Beispiel: Nimm an, es liegen 22 Münzen auf dem Tisch und Du darfst maximal 5 wegnehmen. Dann bleiben nach Deinem Zug 17, 18, 19, 20 oder 21 Münzen auf dem Tisch zurück. 17, 19 und 21 sind ungerade Zahlen, 18 ist durch 2, 20 aber auch durch 4 teilbar. Die Gewinnstrategie lautet, zwei Münzen wegzunehmen.

[4] Das sind die Zahlen 2,4,8,16,. . .