## Mehr als perfekt

Summiert man die Teiler einer natürlichen Zahl $n$ (einschließlich des Teilers 1 aber ausschließlich des Teilers $n$), so erhält man einen Wert, den ich hier Teilersumme nennen will.

15 hat beispielsweise die Teilersumme: $1 + 3 + 5 = 9$.

Man bezeichnet eine Zahl als *perfekt*, wenn sie genauso groß ist wie ihre Teilersumme. Die beiden perfekten Zahlen unter Hundert sind $6 = 1+2+3$ und $28 = 1+2+4+7+14$.

In Erweiterung dieses Sprachgebrauchs nennt man eine Zahl *defizient*, wenn sie größer ist als ihre Teilersumme, und man bezeichnet sie als *abundant*, wenn sie kleiner ist, als ihre Teilersumme. Primzahlen – mit der Teilersumme 1 – sind stets defiziente Zahlen. Dagegen ist 12 eine abundante Zahl (und zwar die kleinste).

Man kann nun feststellen:

> **Satz 1:** Ist eine Zahl perfekt oder abundant, sind alle Vielfachen der Zahl abundant. (Beweis zum Üben).[1]

Man kann bei einer abundanten Zahl prüfen, ob man sie durch Division zu einer kleineren nicht-defizienten Zahl reduzieren kann. Eine nicht-defiziente Zahl, die sich nicht weiter reduzieren lässt, nenne ich *Pionier*. Anders gewendet:

> Eine perfekte oder abundante Zahl heißt *Pionier*, wenn sie nur defiziente Teiler hat.

Wegen Satz 1 ergibt sich:

> **Satz 2:** Jede perfekte Zahl ist ein Pionier.

Die Mutmaßung, dass alle abundanten Zahlen, Vielfache von perfekten Zahlen sind und es damit nur perfekte Pioniere gibt, bewahrheitet sich nicht, denn 20 ist abundant mit ausschließlich defizienten Teilern, ist also damit (der kleinste) abundante Pionier.[2]

[1] Interessant ist hierbei folgender Satz von Prof. Wikipedia: *Die kleinste abundante Zahl, die durch n teilbar ist, ist höchstens* $6n(1 + 2 + 3 + 6 + n + 2n + 3n) = 6n + 12$. Bemerkung meinerseits: Man kann doch diese obere Grenze auf $6n$ setzen, bzw $\max(6n, 12)$ wenn man denn auch $n = 1$ zulassen will.

[2] Allerdings ist 20 pseudoperfekt (denn 20 lässt sich Summe einiger ihrer echten Teiler schreiben). Dies gilt aber für den nächsten abundanten Pionier (70) schon wieder nicht und man hat ihm daher das Attribut *merkwürdig* verliehen. Interessanterweise sind die sieben kleinsten merkwürdigen Zahlen (70, 836, 4030, 5830, 7192, 7912, 9272) allesamt abundante Pioniere.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | d | 11 | d | 21 | d | 31 | d | 41 | d | 51 | d | 61 | d | 71 | d | 81 | d | 91 | d |
| 2 | d | 12 | a | 22 | d | 32 | d | 42 | a | 52 | d | 62 | d | 72 | a | 82 | d | 92 | d |
| 3 | d | 13 | d | 23 | d | 33 | d | 43 | d | 53 | d | 63 | d | 73 | d | 83 | d | 93 | d |
| 4 | d | 14 | d | 24 | a | 34 | d | 44 | d | 54 | a | 64 | d | 74 | d | 84 | a | 94 | d |
| 5 | d | 15 | d | 25 | d | 35 | d | 45 | d | 55 | d | 65 | d | 75 | d | 85 | d | 95 | d |
| **6** | **P** | 16 | d | 26 | d | 36 | a | 46 | d | 56 | a | 66 | a | 76 | d | 86 | d | 96 | a |
| 7 | d | 17 | d | 27 | d | 37 | d | 47 | d | 57 | d | 67 | d | 77 | d | 87 | d | 97 | d |
| 8 | d | 18 | a | **28** | **P** | 38 | d | 48 | a | 58 | d | 68 | d | 78 | a | **88** | **a** | 98 | d |
| 9 | d | 19 | d | 29 | d | 39 | d | 49 | d | 59 | d | 69 | d | 79 | d | 89 | d | 99 | d |
| 10 | d | **20** | **a** | 30 | a | 40 | a | 50 | d | 60 | a | **70** | **a** | 80 | a | 90 | a | 100 | a |

Tabelle 1: Klassifikation der Zahlen bis 100 (d bedeutet defizient, P bedeutet perfekt, a steht für abundant. Pioniere sind durch Fettdruck hervorgehoben.

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Zahlen von 1 bis 100. Die meisten dieser Zahlen (insbesondere die Primzahlen und ihre Potenzen) sind defizient. Perfekt sind (wie schon erwähnt) 6 und 28. Als abundante Zahlen findet man:

| | |
|---|---|
| 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96 | als Vielfache von 6 |
| 56, 84 | als Vielfache von 28 |
| 20, 70, 88 | als abundante Pioniere |
| 40, 60, 80, 100 | als Vielfache von 20 |

Der einzige Pionier, der aus dem Produkt zweier Primzahlen besteht, ist die 6. Aus drei Primfaktoren bestehen die Pioniere $20, 27$ und 70. Alle weiteren Pioniere sind aus mehr Primfaktoren zusammengesetzt (z.B. die 88 aus vieren).

Von den ersten 100 Zahlen sind insgesamt

| | |
|---|---|
| defizient | 76 |
| perfekt | 2 |
| abundant | 22 |
| davon: | |
| Pioniere | 3 |
| Vielfache perfekter Zahlen | 16 |
| nur Vielfache abundanter Pioniere | 3 |

Der nächsthöhere abundante Pionier wäre die 104. Es folgen 272, 304, 368, 464, 550, 572, 650, 748, 836 und 945. Als einzige dreistellige Zahl ist 496 perfekt.

Für die Zahlen unter 1000 gilt:

| | |
|---|---|
| defizient | 751 |
| perfekt | 3 |
| abundant | 246 |
| davon: | |
| Pioniere | 14 |
| Vielfache perfekter Zahlen | 189 |
| nur Vielfache abundanter Pioniere | 43 |

Schließlich hat man für die Zahlen 1 bis 100 000:

| | |
|---|---|
| defizient | 75201 |
| perfekt | 4 |
| abundant | 24795 |
| davon: | |
| Pioniere | 441 |
| Vielfache perfekter Zahlen | 19165 |
| nur Vielfache abundanter Pioniere | 5189 |

Während der Anteil defizienter und abundanter Zahlen rasch gegen einen Grenzwert zu konvergieren scheint, sinkt die Quote der Pioniere mit Erhöhung der Anzahl untersuchter Zahlen ab. Von den 441 Pionieren, die unter den ersten 100 000 Zahlen zu finden sind, gehören 98 zu den ersten 10000 Zahlen.

Mit 945 taucht der erste ungerade Pionier auf und die ungeraden Zahlen überwinden ihr Schicksal als defiziente Stiefkinder. Wegen Satz 1 ist (z.B.) auch 2835 abundant.

Mir ist im Moment nicht klar, was eine Zahl zu einem abundanten Pionier macht. Ich schaue mir diese Pioniere daher genauer an:

$$\begin{aligned}
20 &= 2\cdot 2\cdot 5 & 464 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 29\\
70 &= 2\cdot 5\cdot 7 & 550 &= 2\cdot 5\cdot 5\cdot 11\\
88 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 11 & 572 &= 2\cdot 2\cdot 11\cdot 13\\
104 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 13 & 650 &= 2\cdot 5\cdot 5\cdot 13\\
272 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 17 & 748 &= 2\cdot 2\cdot 11\cdot 17\\
304 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 19 & 836 &= 2\cdot 2\cdot 11\cdot 19\\
368 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 23 & 945 &= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7
\end{aligned}$$

### Pioniere der Form $2^n \cdot p$

Ein generelles Prinzip wird hier nicht ersichtlich, allerdings weist die Primzahlzerlegung darauf hin, wie man die Suche nach einem Pionier optimieren kann. Da nämlich die

Potenzen von 2 nur ganz schwach defizient sind[3], gewinnt man möglicherweise einen Pionier, wenn man Zweierpotenzen mit einer Primzahl multipliziert.

Betrachten wir einen solchen Kandidaten:

$$q = 2^n \cdot p$$

$q$ hat die Teiler:

$$1, 2, 2^2, \ldots 2^n, p, 2 \cdot p, 2^2 \cdot p, \ldots, 2^n \cdot p$$

Der letzte Teiler dieser Liste hat genau den Wert $q$. $q$ ist natürlich Teiler von $q$, spielt aber für die Teilersumme keine Rolle. Für diese erhält man die Formel:

$$\tau_2(n, p) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + p + 2 \cdot p + 2^2 \cdot p + \ldots + 2^{n-1} \cdot p$$

Man kann zusammenfassen:

$$\tau_2(n, p) = 2^{n+1} - 1 + p \cdot (2^n - 1)$$

Mit dieser Konstruktion findet man unter anderem perfekte Zahlen. Es gilt z.B.:

$$6 = \tau_2(1, 3)$$
$$28 = \tau_2(2, 7)$$

Auch die nächste perfekte Zahl, 496, kann man auf diese Weise darstellen:

$$496 = \tau_2(4, 31)$$

Allerdings gibt es (draußen im Weltall der natürlichen Zahlen) auch perfekte Zahlen, die sich nicht so gewinnen lassen.

Als Bedingung für Nicht-Defizientheit lässt sich für unsere Kandidaten notieren:

$$q \leqslant \tau_2(n, p)$$

Damit:

$$2^n \cdot p \leqslant 2^{n+1} - 1 + p \cdot (2^n - 1)$$

Ich löse nach $p$ auf:

$$p \leqslant 2^{n+1} - 1$$

Man erhält damit für $p$ einen kritischen Wert $p^*$ oberhalb dessen nur defiziente Zahlen generiert werden.[4]

**Satz 3:** Die Zahl $q = 2^n \cdot p$ ist genau dann nicht-defizient, wenn gilt:

1. $p$ ist eine Primzahl.
2. $p \leqslant 2^{n+1} - 1$

Gilt statt (2) sogar $p = 2^{n+1} - 1$, so ist $q$ perfekt.

[3] Im Englischen bezeichnet man sie auch als *almost perfect*, was – wie jeder erfolgreiche Charmeur weiß – entsetzlich weit weg ist vom Attribut *perfekt*.

[4] siehe auch Mersenne-Primzahlen.

| | | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 10 | 14 | 22 | 26 | 34 | 38 | 46 | 58 | 62 | 74 |
| 2 | 7 | 12 | 20 | 28 | 44 | 52 | 68 | 76 | 92 | 116 | 124 | 148 |
| 3 | 15 | 24 | 40 | 56 | 88 | 104 | 136 | 152 | 184 | 232 | 248 | 296 |
| 4 | 31 | 48 | 80 | 112 | 176 | 208 | 272 | 304 | 368 | 464 | 496 | 592 |
| 5 | 63 | 96 | 160 | 224 | 352 | 416 | 544 | 608 | 736 | 928 | 992 | 1184 |
| 6 | 127 | 192 | 320 | 448 | 704 | 832 | 1088 | 1216 | 1472 | 1856 | 1984 | 2368 |
| 7 | 255 | 384 | 640 | 896 | 1408 | 1664 | 2176 | 2432 | 2944 | 3712 | 3968 | 4736 |
| 8 | 511 | 768 | 1280 | 1792 | 2816 | 3328 | 4352 | 4864 | 5888 | 7424 | 7936 | 9472 |
| 9 | 1023 | 1536 | 2560 | 3584 | 5632 | 6656 | 8704 | 9728 | 11776 | 14848 | 15872 | 18944 |
| 10 | 2047 | 3072 | 5120 | 7168 | 11264 | 13312 | 17408 | 19456 | 23552 | 29696 | 31744 | 37888 |

Tabelle 2: Von Zweierpotenzen und einer weiteren Primzahl generierte Pioniere. In die erste Zeile wurden die ersten 12 Primzahlen ($p$) aufgenommen (bis auf die Zahl 2). Die erste Spalte beinhaltet den Wert $n$, die zweite Spalte die kritische Grenze $p^*$. Perfekte Zahlen sind hellrot markiert, ihre (abundanten) Vielfachen rot. Abundante Pioniere sind hellblau (Vielfache blau). Defiziente Zahlen erscheinen in grau.

Besonders interessant sind natürlich die perfekten Zahlen, die man erhält, wenn der kritische Wert tatsächlich eine Primzahl ist[5]. Bei ungeraden Exponenten für 2 (also ungeraden Parametern $n$) ist $p^*$ allerdings stets eine durch 3 teilbare Zahl (Beweis zum Üben). Nur für den Fall $n = 1$ ist diese also prim.

Für die nächsten gerade Werte von $n$ erhält man über

$$\tau_2(n, p^*) = 2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$$

die perfekten Zahlen:

$$\tau_2(2, 7) = 28 \qquad \tau_2(4, 31) = 496 \qquad \tau_2(6, 127) = 8128$$

8128 ist tatsächlich die einzige vierstellige Zahl, die perfekt ist.

Die nächste nach unserem Schema generierte Zahl springt dann allerdings aus der Reihe. $\tau_2(8, 511) = 130816$ ist abundant, allerdings ist hier $p^*$ tatsächlich auch keine Primzahl ($p^* = 511 = 7 \cdot 73$).

Die Zahl $130816 = 2^8 \cdot 7 \cdot 73$ ist also nach unserer Klassifikation ein abundanter Pionier.

Mit $n = 10$ erhält man wiederum keine perfekte Zahl, sondern mit $2096128 = 2^{10} \cdot 23 \cdot 89$ einen weiteren abundanten Pionier.

Dafür liefert $n = 12$ die perfekte Zahl $\tau_2(12, 8191) = 33\,550\,336$.

[5] Hoppla, das wusste schon Herr E. aus A.

### Weitere Pioniere

Betrachtet man Zahlen der Form: $q = 3^n \cdot p$ stellt man schnell fest, dass diese (für $p > 2$) stets defizient sind. Ähnlich wie oben bestimmt man eine kritische Zahl $p^*$ über der die Zahlen $q$ stets defizient sind. Es ergibt sich unter Zuhilfenahme der Formel

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

der Wert:

$$p^* = 3 - \frac{4}{3^n + 1}.$$

Es folgt:

$$p \leqslant p^* < 3$$

Allgemein erhält man für Zahlen $q = b^n \cdot p$ mit den Primzahlen $b$ und $p$ als kritischen Wert $p^*$:

$$p^* = \frac{b^{n+1} - 1}{(b-2) \cdot b^n + 1}$$

Betrachtet man diesen Wert als Funktion von $n$ mit festem $b > 2$, so erkennt man, dass diese Funktion monoton steigend ist und sich assymptotisch $\frac{b}{b-2}$ annähert. Es gilt (für $b > 2$):

$$p^* < \frac{b}{b-2}$$

Entsprechend wird man (außer $6 = 3 \cdot 2$) keine weiteren Pioniere der Form $q = b^n \cdot p$ finden, solange $p$ und $b$ Primzahlen sind und $b > 2$.

Im folgenden Schaubild kann man sich überzeugen, dass die Pioniere, die aus dem Produkt einer Primpotenz und einer weiteren Primzahl bestehen, stets der Bauart $q = 2^n \cdot p$

sind.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $6 = 2 \cdot 3$ | $20 = 2^2 \cdot 5$ | $28 = 2^2 \cdot 7$ | $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ |
| $88 = 2^3 \cdot 11$ | $104 = 2^3 \cdot 13$ | $272 = 2^4 \cdot 17$ | $304 = 2^4 \cdot 19$ |
| $368 = 2^4 \cdot 23$ | $464 = 2^4 \cdot 29$ | $496 = 2^4 \cdot 31$ | $550 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11$ |
| $572 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13$ | $650 = 2 \cdot 5^2 \cdot 13$ | $748 = 2^2 \cdot 11 \cdot 17$ | $836 = 2^2 \cdot 11 \cdot 19$ |
| $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ | $1184 = 2^5 \cdot 37$ | $1312 = 2^5 \cdot 41$ | $1376 = 2^5 \cdot 43$ |
| $1430 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ | $1504 = 2^5 \cdot 47$ | $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ | $1696 = 2^5 \cdot 53$ |
| $1870 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$ | $1888 = 2^5 \cdot 59$ | $1952 = 2^5 \cdot 61$ | $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ |
| $2090 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$ | $2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ | $2210 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$ | $2470 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$ |
| $2530 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$ | $2584 = 2^3 \cdot 17 \cdot 19$ | $2990 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23$ | $3128 = 2^3 \cdot 17 \cdot 23$ |
| $3190 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29$ | $3230 = 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$ | $3410 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$ | $3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ |
| $3496 = 2^3 \cdot 19 \cdot 23$ | $3770 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29$ | $3944 = 2^3 \cdot 17 \cdot 29$ | $4030 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$ |
| $4070 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 37$ | $4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ | $4216 = 2^3 \cdot 17 \cdot 31$ | $4288 = 2^6 \cdot 67$ |
| $4408 = 2^3 \cdot 19 \cdot 29$ | $4510 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 41$ | $4544 = 2^6 \cdot 71$ | $4672 = 2^6 \cdot 73$ |
| $4712 = 2^3 \cdot 19 \cdot 31$ | $4730 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 43$ | | |

Man ersieht in der Aufstellung, dass auch das Produkt aus unterschiedlichen Primzahlen einen Pionier (und sogar eine perfekte Zahl) darstellen kann. Zwangsläufig ist dies jedoch nicht. Tatsächlich treten die folgenden Möglichkeiten auf:

1. Das Produkt ist defizient. Beispiel: $10 = 2 \cdot 5$
2. Das Produkt ist Vielfaches eines Pioniers. Beispiel: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Nach unserer Klassifikation ist aber 30 eine abundante Zahl, die kein Pionier ist.
3. Das Produkt ist ein Pionier. Beispiel: $6 = 2 \cdot 3$ (perfekte Zahl). $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ (abundanter Pionier).

Es ist sinnlos nach weiteren Pionieren zu suchen, die das Produkt zweier oder dreier Primzahlen sind. Das Produkt von vier unterschiedlichen Primzahlen ist dagegen interessant. In der obigen Auflistung findet man einige von ihnen. Wir bauen Pioniere dieser Art einmal zusammen, dabei orientieren wir uns an möglichst kleinen Zahlen. Beginnen wir also mit dem Primfaktor 2. Wenn wir als nächsten Primfaktor 3 ergänzen, erhalten wir ein Vielfaches des perfekten Pioniers 6, was wir nicht wollen. Fahren wir also mit dem Primfaktor 5 fort. Als dritter Primfaktor verbietet sich 7, da wir dann Vielfache des abundanten Pioniers 70 berechnen würden. Wir betrachten also zunächst Kandidaten der Form:

$$q = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot p = 110 \cdot p$$

Die Aufstellung zeigt, dass wir Pioniere erhalten, wenn

$$p \in \{13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}.$$

Für $p = 47$ erhalten wir das Produkt $q = 5170$ und mit $p = 53$ ergibt sich $q = 5830$ beide Produkte sind abundant und damit Pioniere. Erst bei $p = 59$ erhalten wir mit $q = 6490$ eine defiziente Zahl.

Allgemeiner: Wir betrachten das Produkt von $n$ unterschiedlichen Primzahlen:

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$$

wobei wir $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ als gegeben betrachten. Für $p_n$ ergibt sich als kritischer Wert:

$$p^* = \frac{\rho + T(\rho)}{\rho - T(\rho)}$$

wobei sich $\rho$ als das Produkt $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$ ergibt und $T(\rho)$ die Teilersumme dieses Produkts ist.[6]

**Satz 4:** Sei $q$ ein Produkt aus unterschiedlichen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ und einer weiteren Primzahl $p_n$, so gilt:

1. Ist $\rho = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$ nicht-defizient, so ist $q$ abundant.
2. Ist $\rho$ defizient, so ist $q$ genau dann nicht defizient, falls gilt:

   $$p_n \leqslant \frac{\rho + T(\rho)}{\rho - T(\rho)}$$

   Dabei ist $T(\rho)$ die Teilersumme von $\rho$.

Ersetzt man in Satz 4 den Wert $\rho$ durch die Zweierpotenz $2^n$, so erhält man wegen:

$$T(2^n) = 2^n - 1$$

Die Ungleichung

$$p_n \leqslant 2^{n+1} - 1$$

Satz 4 ist also mit Satz 2 verträglich. Ob sich damit Satz 4 auf beliebige Werte $\rho$ beziehen lässt, ist mir im Moment unklar. Eine Modifikation muss getroffen werden, wenn $\rho$ sowohl Potenzen von $p$ als auch weitere Primfaktoren enthält.

Für $\rho = 2 \cdot 5 \cdot 11$ erhält man in der Tat den kritischen Wert $p^* = 54$. Der vierte Primfaktor $p = 53$ musste also einen Pionier generieren, während man bei $p = 59$ einen defizienten Wert erhalten musste.

[6] Zunächst verwundert es, dass sich für einen abundanten Wert $\rho$ ein negativer kritischer Wert $p^*$ ergibt. Das würde doch heißen, dass man $\rho$ mit einer beliebigen Primzahl multiplizieren könnte und immer ein defizientes Ergebnis herauskäme. Betrachtet man die Herleitung der obigen Formel, so stellt man fest, dass man falls $T(\rho) > \rho$ die Inversionsregel auf das Ungleichzeichen anwenden müsste und daher bei abundantem $\rho$ (und damit negativem $p^*$) die Bedingung für ein defizientes $q = \rho \cdot p$ lautet: $p < p^*$, was bei $p^* < 0$ trivialerweise unerfüllbar ist. Wir erhalten hier also keinen Widerspruch zu Satz 1.

Für $\rho = 2 \cdot 5 \cdot 13 = 130$ bestimmt man $p^* = 31,5$. Damit werden als abundante Pioniere bestätigt:

$$2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 = 2210 \qquad 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 = 2470 \qquad 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23 = 2990$$
$$2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 = 3770 \qquad 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31 = 4030$$

Der Wert $q = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 37 = 4810$ ist dagegen defizient und kein Pionier.

Auch $\rho = 2 \cdot 5 \cdot 17$ liefert einen kritischen Wert $(20,25)$, der eine weitere Kombination zur Darstellung eines Pioniers $(2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 = 3230)$ zulässt. Mit diesem letzten Pionier scheinen aber die Möglichkeiten für vierfaktorige Primprodukte mit den Faktoren 2 und 5 erschöpft (zumindest wenn die Faktoren unterschiedlich sein sollen).

Was mich besonders interessiert (in diesem nutzlosen Gestöber) sind Pioniere (oder gar perfekte Zahlen) mit ungerader Endziffer ungleich 5. Bislang habe ich nur den abundanten Pionier $22\,309\,287 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ gefunden. Ebenso ist $81081 = 3^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ein abundanter Pionier. Beide Werte fand ich jedoch durch eher unsystematische Suche.[7] 81081 ist allerdings tatsächlich der kleinste Pionier mit Endziffer 1 und der einzige, der kleiner als 100 000 ist. In diesem Bereich gibt es keine Pioniere mit Endziffer 3, 7 oder 9.

Betrachtet man die Zahlen bis 500 000, so findet man folgende Pioniere mit Endziffern 1, 3, 7 oder 9:

$$\begin{array}{rlrl}
81\,081 &= 3^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 & 153\,153 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \\
171\,171 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 & 189\,189 &= 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \\
207\,207 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 & 223\,839 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \\
261\,261 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 & 279\,279 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \\
297\,297 &= 3^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 & 351\,351 &= 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2
\end{array}$$

In dieser Aufstellung finden sich mit einer Ausnahme nur Vielfache von $9009 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Da die Zahlen damit auch Vielfache von 1001 sind, ergeben sich in den Zifferfolgen Wiederholungsmuster. Das ist eine nette Besonderheit, lässt sich methodisch aber nicht ausschlachten (jedenfalls denke ich das).

207 207 ist der kleinste Pionier mit Endziffer 7, der letzten noch ausstehenden Endziffer. Gleichzeitig ist diese Zahl auch die kleinste abundante Zahl mit Endziffer 7. Für die Endziffern ergibt sich als jeweils kleinste abundante Zahl:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 81 081 | 12 | 153 153 | 24 | 945 | 36 | 207 207 | 18 | 189 189 | 20 |

Pioniere sind die ungeraden Zahlen sowie die 20.

Alle zehn ungeraden Pioniere in der obigen Aufstellung sind pseudoperfekt. Interessant ist dabei der letzte Fall: Die Teilersumme von 351 351 ist gerade einmal um 18 größer als

[7] 81081 ist übrigens pseudoperfekt (man erhält die Zahl durch Aufsummieren ihrer Teiler ohne 429 und 33). Ungerade merkwürdige Zahlen sind also weiter zu suchen. Ebenso kleinere Pioniere mit Endziffer 1 (oder 3 oder 7 oder 9)

die Zahl selbst[8]. Da aber 7 und 11 Teiler von 351 351 sind, genügt es, diese beiden Zahlen in der Summation zu überspringen, um 351 351 zu erhalten. Das schafft man übrigens durch keine anders aufgestellte Summe.

Ich habe diese letzte so knapp abundante Zahl weiter unter die Lupe genommen. Tilgt man eine 13 aus der Primzahlzerlegung, erhält man den defizienten Wert 27027 mit einem kritischen Wert $p^*$ (siehe Satz 4) von $182{,}86$. Mit 181 als größter Primzahl unter diesem Wert erhält man als Pionier:

$$4\,891\,887 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 181$$

### Weitere Ergebnisse

$$33\,426\,748\,355 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$$

ist ein abundanter Pionier, der kein Vielfaches von 2 oder 3 ist. Die Faktoren in der Primzerlegung sind aufeinanderfolgende Primzahlen, die jeweils nur einfach vorkommen. Die Teilersumme der Zahl ist (mit 66 873 456 845) mehr als doppelt so groß, wie diese selbst.

Kleiner als die eben genannte Zahl ist der Pionier:

$$5\,391\,411\,025 = 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$

Er hat eine Teilersumme von 5 407 897 775 und ist pseudoperfekt.

Gigantisch ist wiederum der Pionier

$$13\,450\,572\,744\,315 = 5 \cdot 7 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 93 \cdot 97$$

Teilersumme 13 497 070 238 085.

### Vermutungen

- Es gibt keine ungerade perfekte Zahl.
- Es gibt perfekte Zahlen, die nicht der Form $2^n \cdot p$ sind.
- Es gibt merkwürdge ungerade Zahlen.
- Es gibt abundante Zahlen, die nicht Vielfache von 2, 3 und 5 sind.

[8] Für eine ungerade Zahl ist das eigentlich doch schon perfekt. Die Zahl beträgt 99,9995 % ihrer Teilersumme.