Die Tripel von Pythagoras

11.2018 Talea, Fin, Osama, Benno, Niklas

Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen

Wir schauen uns ein Dreieck mit den Seitenlängen $3, 4$ und 5 an. Wie man über die Umkehrung des Satzes von Pythagoras[1] feststellen kann, ist dieses Dreieck rechtwinklig.
Die Seitenlängen des betrachteten rechtwinkligen Dreiecks kann man in einem sogenannten Tripel zusammenfassen. Man schreibt: $(3, 4, 5)$.

> Ein Tripel aus den natürlichen Zahlen a, b und c (mit $a \leqslant b < c$) heißt pythagoreisches Tripel, wenn gilt:
> $$a^2 + b^2 = c^2$$
> (a, b, c) ist also genau dann ein pythagoreisches Tripel, wenn a, b und c natürliche Zahlen sind und man aus Seiten der Längen a, b und c ein rechtwinkliges Dreieck bilden kann.

Hat man ein pythagoreisches Tripel gefunden, kann man unendlich viele andere bestimmen. Dazu reicht es, wenn man die Zahlen des ursprünglichen Tripels mit einer natürlichen Zahl multipliziert: Da $(3, 4, 5)$ ein pythagoräisches Tripel ist, sind auch $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 18)$, $(15, 20, 25)$, ... pythagoreische Tripel.
Man erkennt, dass zum Beispiel das Tripel $(33, 44, 55)$ aus dem Tripel $(3, 4, 5)$ entwickelt werden konnte, indem man feststellt, dass die Werte $33, 44$ und 55 nicht teilerfremd sind. Tatsächlich sind alle drei Werte durch 11 teilbar. Führt man die Division durch, so erhält man das Ausgangstripel $(3, 4, 5)$.

> Sind in einem pythagoreischen Tripel die drei Werte teilerfremd, so nennt man das Tripel *primitives pythagoreisches Tripel* (pp-Tripel).
>
> Sind die drei Werte eines Tripels dagegen nicht teilerfremd, so nennen wir hier das Tripel *abgeleitetes Tripel*.
>
> Teilt man die Werte eines abgeleiteten Tripels durch den größten gemeinsamen Teiler der Werte, so erhält man ein primitives Tripel.

[1] Gilt in einem Dreieck, dass die Summen zweier Seitenquadrate das dritte Seitenquadrat ergibt, so ist das Dreieck rechtwinklig

Teilbarkeit der Tripel-Werte

Lasst uns mit einer Aufgabe beginnen:

> Zeige, dass jedes primitive pythagoreische Tripel aus einer geraden und einer ungeraden Kathete sowie aus einer ungeraden Hypotenuse besteht.

Beweis: Zunächst überlegen wir, dass jede Kathete entweder gerade oder ungerade sein kann. Aus den Katheteneigenschaften kann man dann ableiten, ob die Hypotenuse gerade oder ungerade ist.
Wir betrachten die möglichen Fälle:

Katheten beide gerade, Hypotenuse gerade (ggg): Entsprechende pythagoreische Tripel existieren (z.B.: $(6, 8, 10)$). Allerdings sind drei gerade Werte niemals teilerfremd. Sie haben mindestens den gemeinsamen Teiler 2. Damit sind pythagoreische Tripel aus drei geraden Werten niemals primitive pythagoreische Tripel.

Katheten beide ungerade, Hypotenuse gerade (uug): Sind beide Katheten ungerade, so kann man sie in der folgenden Form schreiben:

$$a = 2m + 1 \qquad\qquad b = 2n + 1$$

wobei m und n natürliche Zahlen sind. Nun berechnen wir das Hypotenusenquadrat nach dem Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2+b^2 = \Big(2m+1\Big)^2+\Big(2n+1\Big)^2 = 4m^2+4m+1+4n^2+4n+1 = 4(m^2+m+n^2+n)+2$$

Betrachte den Term hinter dem letzten Gleichheitszeichen: Die Summe in der Klammer ist eine natürliche Zahl (nennen wir sie k). Wir haben also:

$$c^2 = 4k + 2$$

Wir haben also durch Nachrechnen herausgefunden, dass die Summe zweier ungerader Quadratzahlen eine gerade Zahl ist, die nicht durch 4 teilbar ist.

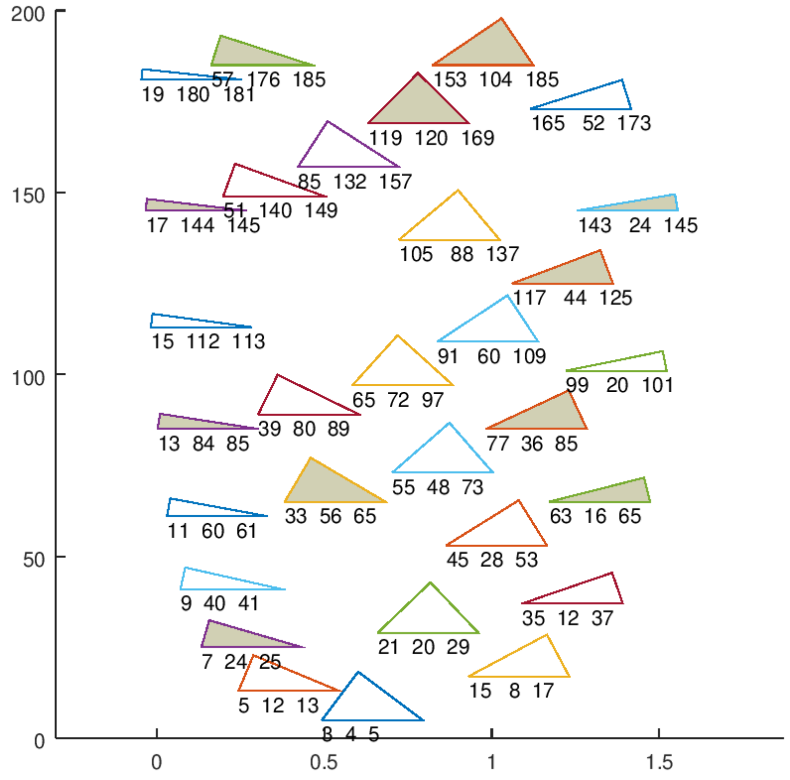
Da aber alle geraden Quadratzahlen Vielfache von 4 sind, kann das von uns berechnete c^2 keine Quadratzahl sein. Das heißt c kann unter den hier betrachteten Voraussetzungen nicht ganzzahlig sein. Ein pythagoreisches Zahlentripel mit zwei ungeraden Katheten kann es folglich nicht geben.

Katheten ungerade und gerade, Hypotenuse ungerade (ugu): Ein Beispiel für diese Konstellation ist das pp-Tripel $(3, 4, 5)$. Damit ist die Existenz von (ugu)-Tripel nachgewiesen. Wie wir sehen werden, kann auch die Anordnung (guu) auftreten. In jedem Fall ist genau eine Kathete gerade und genau eine Kathete ungerade.

Das war jetzt ein wenig Arbeit und wir belohnen uns, indem wir unseren mathematischen Blick liebevoll auf die ersten acht primitiven pythagoreischen Tripel richten:

$$\begin{array}{cccc} (3,4,5) & (5,12,13) & (8,15,17) & (7,24,25) \\ (20,21,29) & (12,35,37) & (9,40,41) & (28,45,53) \end{array}$$

Tatsächlich hat immer genau eine der Katheten einen geraden Wert, die anderen beiden Einträge sind ungerade.



Alle primitiven pythagoreischen Dreieck mit einer Hypotenusenlänge kleiner als 200. Um die Dreiecke in einem Bild darstellen zu können, wurden sie so skaliert, dass die Hypotenusenlänge bei allen Dreiecken gleich ist. Die Anordnung der Dreiecke wurde so gewählt, dass von unten nach oben die Hypotenusen länger werden und von links nach rechts die Winkel rechts im Dreieck größer werden. Eingefärbte Dreiecke haben nicht-prime Hypotenusen. Linienfarben dienen nur zur Unterscheidung und haben sonst keine Bedeutung. Zusammen mitt den abgeleiteten Dreiecken gibt es 232 Kombinationen mit Hypotenuse $<$ 200.

> Zeige, dass in jedem primitiven pythagoreischen Tripel eine Kathete ein Vielfaches von 3, die andere Kathete und die Hypotenuse aber keine Vielfachen von 3 sind.

Die Feststellung, dass die Hypotenuse weder ein Vielfaches von 2 noch ein Vielfaches von 3 ist, verleitete mich zunächst zur Annahme, dass die Hypotenuse in einem pp-Tripel immer einen Primzahl-Wert hat.
Wie bestürzt war ich, als ich in der obigen Liste das vierte Tripel betrachtete. Offenbar kann die Hypotenuse eines pp-Tripels ein Vielfaches von 5 sein. Wir werden im Abschnitt *Neue Wege zu den pp-Tripeln* darauf zurückkommen.
Bevor wir uns um die Teilbarkeit durch 5 kümmern, reichen wir den Beweis für die Teilbarkeit durch 3 nach. Mit diesem Beweis machen wir uns mit der Argumentationstechnik vertraut.

Beweis (k=3): Jede natürliche Zahl hat bei der Division durch 3 den Rest 0, 1 oder 2. Wir beobachten:

Hat eine Kathete den Dreier-Rest 0, so hat ihr Quadrat den Dreier-Rest 0.
Hat eine Kathete den Dreier-Rest 1, so hat ihr Quadrat den Dreier-Rest 1.
Hat eine Kathete den Dreier-Rest 2, so hat ihr Quadrat den Dreier-Rest 1.

Addiert man nun zwei Kathetenquadrate, so addieren sich auch deren Dreier-Reste. Folgende Konstellationen können auftreten:

1. Dreier-Rest 0 + Dreier-Rest 0 = Dreier-Rest 0
2. Dreier-Rest 0 + Dreier-Rest 1 = Dreier-Rest 1
3. Dreier-Rest 1 + Dreier-Rest 1 = Dreier-Rest 2

Fall 1 tritt bei pythagoreischen Tripeln durchaus auf (z.B.: (9,12,15)). Wie bei der Teilbarkeit durch 2 ergeben sich aber ausnahmslos Tripel, die nicht teilerfremd sind. Diese sind aber abgeleitet und nicht primitiv.
Fall 3 kann nicht auftreten. Wir haben oben gesehen, dass das Quadrat einer natürlichen Zahl einen Dreier-Rest von 0 oder von 1 aufweist. Fall 3 verlangt vom Hypotenusen-Quadrat einen Dreier-Rest von 2 zu haben. Das ist unmöglich.
Es verbleibt also Fall 2 als einzig möglicher.

Beweis (k=5): Jede natürliche Zahl hat bei der Division durch 5 den Rest 0, 1, 2, 3 oder 4. Wir beobachten:

Hat eine Kathete den Fünfer-Rest 0, so hat ihr Quadrat den Fünfer-Rest 0.
Hat eine Kathete den Fünfer-Rest 1, so hat ihr Quadrat den Fünfer-Rest 1.
Hat eine Kathete den Fünfer-Rest 2, so hat ihr Quadrat den Fünfer-Rest 4.
Hat eine Kathete den Fünfer-Rest 3, so hat ihr Quadrat den Fünfer-Rest 4.
Hat eine Kathete den Fünfer-Rest 4, so hat ihr Quadrat den Fünfer-Rest 1.

Was kann nun bei der Addition der Katheten-Quadrate passieren?

Beide Katheten-Quadrate haben den gleichen Fünfer-Rest Sind beide Fünfer-Reste 0, dann sind beide Katheten Vielfache von 5 und Gleiches gilt für die Hypotenuse: Das Tripel ist in diesem Fall nicht primitiv.

Haben beide Katheten-Quadrate den Fünfer-Rest 1, so entsteht durch Summation der Fünfer-Rest 2, der durch das Hypotenusen-Quadrat nicht erreicht werden kann (keine Tripel).

Haben beide Katheten-Quadrate den Fünfer-Rest 2, so entsteht durch Summation der Fünfer-Rest 3, der durch das Hypotenusen-Quadrat nicht erreicht werden kann (keine Tripel).

Die Katheten-Quadrate haben unterschiedliche Fünfer-Reste: Ist eines der Katheten-Quadrate 0, so ist die dazugehörige Kathete ein Vielfaches von 5 und pp-Tripel können sich ergeben. Das andere Katheten-Quadrat hat dann den gleichen Fünfer-Rest wie das Hypotenusen-Quadrat. Zweite Kathete und Hypotenuse sind in dem Fall nicht durch 5 teilbar.

Hat ein Katheten-Quadrat den Fünfer-Rest 1 und das andere den Fünfer-Rest 4, so können sich ebenfalls pp-Tripel ergeben. In diesem Fall ist die Hypotenuse ein Vielfaches von 5, die Katheten sind nicht durch 5 teilbar.

Der letzte betrachtete Fall zeigt uns, dass die Hypotenuse keine Primzahl sein muss, sondern eine durch 5 teilbare Zahl sein kann. Dies ließ sich dadurch erreichen, dass sich die Fünfer-Reste der Katheten-Quadrate durch Addition aufhoben.
Wir fassen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen:

			Kathete 1		
5er-Rest Kathete			0	1,4	2,3
5er-Rest Kathete^2			0	1	4
	0	0	0	1	4
Kathete 2	1,4	1	1	2	0
	2,3	4	4	0	3

Exkurs: Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ mit primitiven pythagoreischen Tripeln

Ein elementarer Beweis der Mathematik, der bereits im antiken Griechenland bekannt war, ist der Nachweis, dass sich $\sqrt{2}$ nicht als Bruch ausdrücken lässt[2]. Dieser Beweis lässt sich auch mit pp-Tripeln führen:
Wir nehmen an, dass es ein pythagoreisches Tripel gibt, bei dem die Katheten-Werte gleich sind (a, a, c). In dem Fall gilt:

$$a^2 + a^2 = c^2$$

über $2a^2 = c^2$ gelangt man zu

$$\sqrt{2}a = c$$

Löst man nach $\sqrt{2}$ auf, so findet man:

$$\sqrt{2} = \frac{c}{a}$$

Damit hätte man eine Bruchdarstellung von $\sqrt{2}$, denn a und c sind als Bestandteile eines pythagoreischen Tripels natürliche Zahlen.
Da man jedes pythagoreische Tripel zu einem pp-Tripel reduzieren kann (Division durch den ggT), ist dann auch garantiert, dass a und c teilerfremd sind.
Wir wissen aber bereits, dass es ein pp-Tripel mit identischen Katheten-Werten nicht geben kann: Wir zeigten oben, dass pp-Tripel immer ein geraden und einen ungeraden Katheten-Wert aufweisen. a müsste also eine natürliche Zahl sein, die sowohl gerade als auch ungerade ist. Dies ist ein Widerspruch.
Es ist bemerkenswert, dass dieser Beweis Elemente des klassischen Beweises (steht auch bei Euklid) enthält. Euklid beginnt ebenfalls mit einer Gleichung des Inhalts $2a^2 = c^2$. Er verwendet, dass a und c teilerfremd sind und er erreicht den Widerspruch, indem er zeigt, dass a sowohl gerade als auch ungerade sein muss.

[2] und folglich in Dezimalbruchschreibweise unendlich viel Nachkommastellen ohne Wiederholungsmuster hat

Die indischen Formeln

Der alt-griechische Gelehrte Euklid (etwa 3.Jahrhundert v.Chr.) präsentiert in seinen *Elementen* (Buch 10, Proposition 29, Lemma 1) ein Verfahren zur Erstellung von (primitiven) pythagoreischen Tripeln. Das Verfahren war wahrscheinlich bereits den alten Indern bekannt. Jedenfalls wird es vom indischen Mathematiker Brahmagupta (598–668) explizit angeführt. In Bezug auf diese Quelle werden die verwendeten Formeln auch die *indischen Formeln* genannt.
Das Verfahren funktioniert folgendermaßen:

1. Wähle zwei natürliche Zahlen u und v. u sei größer als v.
2. Berechne das Tripel $(u^2 - v^2, 2 \cdot u \cdot v, u^2 + v^2)$.

Das so erzeugte Tripel ist pythagoreisch. Es ist außerdem primitiv, wenn u und v teilerfremd und nicht beide ungerade sind.
Jedes pp-Tripel lässt sich durch ein natürliches Zahlenpaar (u, v) erzeugen. (Der Beweis steht bei Wikipedia, scheint aber ein bisschen kompliziert zu sein).

Beispiel 1: Wählt man $u = 2$ und $v = 1$, so erhält man: $k = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$, $K = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ und $h = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$. Also das pp-Tripel $(3, 4, 5)$.

Beispiel 2: Mit $u = 5$ und $v = 2$ bestimmt man: $k = 25 - 4 = 21$, $K = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$ und $h = 25 + 4 = 29$. Ebenfalls ein pp-Tripel: $(21, 20, 29)$.

Beispiel 3: Das Paar $u = 6$ und $v = 4$ ist nicht teilerfremd. Man erhält das Tripel $(36 - 16, 2 \cdot 6 \cdot 4, 36 + 16) = (20, 48, 52)$. Dieses Tripel ist abgeleitet. Teilt man es durch den ggT, der 4 beträgt, so findet man das pp-Tripel $(5, 12, 13)$.

Beispiel 4: Mit $u = 7$ und $v = 5$ hat man zwei ungerade Zahlen gewählt. Man rechnet: $(49 - 25, 2 \cdot 7 \cdot 5, 49 + 25) = (24, 70, 74)$. Dieses Tripel ist pythagoreisch aber nicht primitiv. Man findet: $(24, 70, 74) = 2 \cdot (12, 35, 37)$.
Die indischen Formeln beschreiben, wie man aus dem Zahlenpaar (u, v) ein pythagoreisches Tripel (a, b, c) gewinnt. Umgekehrt kann man auch versuchen aus einem pythagoreischen Tripel das zugrundeliegende Zahlenpaar zu errechnen.
Man hat die beiden Formeln:

$$h = u^2 + v^2 \qquad\qquad k = u^2 - v^2$$

Wenn man die beiden Formeln einerseits addiert, andererseits subtrahiert, erhält man:

$$h + k = 2u^2 \qquad\qquad h - k = 2v^2$$

Dadurch ergeben sich die Bestimmungsgleichungen:

$$u = \sqrt{\frac{h+k}{2}} \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{h-k}{2}}$$

Beispiel 1: Im pp-Tripel $(3, 4, 5)$ ist $k = 3$ und $h = 5$. Es ergibt sich:

$$u = \sqrt{\frac{5+3}{2}} = \sqrt{4} = 2 \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{5-3}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Beispiel 2: Für das Tripel $(7, 24, 25)$ findet man:

$$u = \sqrt{\frac{25+7}{2}} = \sqrt{16} = 4 \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{25-7}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Abgeleitete Tripel reduziere man zuerst auf pp-Tripel, bilde dann das erzeugende Zahlenpaar und multipliziere es mit $\sqrt{r}$. r ist hierbei der größte gemeinsame Teiler des abgeleiteten Tripels.

Beispiel 3: Das Tripel $(12, 16, 20)$ ist abgeleitet, da $(12, 16, 20) = 4 \cdot (3, 4, 5)$. $(3, 4, 5)$ führt zum Zahlenpaar $[2, 1]$, demnach lässt sich $(12, 16, 20)$ dem Zahlenpaar $\sqrt{4} \cdot [2, 1] = [4, 2]$ zuordnen.

Beispiel 4: Auch $(16, 30, 34)$ ist ein abgeleitetes Tripel (denn $(16, 30, 34) = 2 \cdot (8, 15, 17)$). Man findet für das pp-Tripel das Zahlenpaar $[4, 1]$ und folglich für das Tripel $(16, 30, 34)$ das Paar $[4 \cdot \sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Dieses Paar besteht offensichtlich nicht aus natürlichen Zahlen. Tatsächlich lassen sich die meisten abgeleiteten pythagoreischen Tripel nicht aus ganzzahligen Zahlenpaaren über die indischen Formeln herleiten. Aus dem hier beschriebenen Darstellungsalgorithmus geht hervor, dass nur abgeleitete Tripel herleitbar sind, deren ggT eine Quadratzahl ist.

Hypotenusen-Längen

1653 meldet der französische Philosoph Bernard Medon an einen Freund:„Der großartige Fermat ist gestorben." Der 1607 geborene Jurist und Mathematiker Pierre Fermat sei in Toulouse an der Beulenpest erkrankt und ihr erlegen.
Zum Glück irrte Medon, Fermat überlebte seine Pest-Erkrankung und lebte bis 1665. Die Mathematik verdankt Fermat großartige Entdeckungen und eine dieser Entdeckungen spielt auch für pythagoreische Tripel eine Rolle. Es geht um den *Zwei-Quadrate-Satz,* den man (weil Fermat ihn in einem Brief vom 25.12.1640 notierte) auch das *Fermatsche Weihnachtstheorem* nennt:

> Eine ungerade Primzahl p ist genau dann Summe zweier Quadratzahlen $x^2 + y^2$, wenn p eine Zahl ist, die beim Dividieren durch 4 einen Teilerrest von 1 hat. p nennt man in diesem Fall *pythagoreische Primzahl*.

Auf den ersten Blick hat der Zwei-Quadrate-Satz viel mit den pythagoreischen Tripeln zu tun. Wir interessieren uns ja genau für die Summe zweier Quadratzahlen. Allerdings verlangen wir, dass die Summe der zwei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ergibt, wie zum Beispiel beim pp-Tripel $(3, 4, 5)$:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Fermat beschreibt etwas anderes. Er betrachtet Gleichungen wie:

$$2^2 + 3^2 = 13$$

Auf der rechten Seite steht kein Quadrat. Entsprechend kann man aus den Fermatschen Gleichungen zwar die Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken gewinnen (in unserem Beispiel $(2, 3, \sqrt{13})$), aber von ihnen sind in aller Regel nur die Katheten ganzzahlig $(2, 3)$, während die Hypotenusen irrational sind ($\sqrt{13}$).
Trotzdem hilft Fermats Satz auch uns weiter: Verwendet man die „Katheten" eines Fermatschen Tripels in den indischen Formeln als u und v, so erhält man ein pythagoreisches Tripel, dessen Hypotenusenlänge genau das Quadrat der Hypotenuse des Fermatschen Tripel ist.

$$k = u^2 - v^2 = 9 - 4 = 5 \qquad K = 2uv = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \qquad h = u^2 + v^2 = 9 + 4 = 13$$

Das bedeutet, dass jede pythagoreische Primzahl Hypotenusen-Wert eines pp-Tripels sein kann.

Katheten-Längen

Für die Katheten-Längen kann man ähnliche Überlegungen anstellen. Wir werden zeigen:

Katheten-Länge (k) Jede ungerade Zahl größer als 1 kann Katheten-Länge (k) in einem pp-Tripel sein.

Katheten-Länge (K): Jede durch 4 teilbare Zahl kann Katheten-Länge (K) in einem pp-Tripel sein.

Wir werden beide Aussagen konstruktiv beweisen. Das heißt, wir werden zeigen, wie unter den gegebenen Voraussetzung ein pp-Tripel errechnet werden kann.
Wir beginnen mit der geraden Katheten-Länge K: K ist eine durch 4 teilbare Zahl. Wir teilen K durch 2. Dieser Wert ist gerade. Man kann also den Wert durch zwei Faktoren darstellen, von denen der erste eine Zweierpotenz ist und der zweite einen ungerade Wert darstellt. Man hat also allgemein:

$$\frac{K}{2} = 2^p \cdot q$$

wobei q ungerade ist.
Wir rechnen dies für das Beispiel $K = 40$. Man findet:

$$\frac{K}{2} = \frac{40}{2} = 20 = 2^2 \cdot 5$$

Die Zweierpotenz 2^p besitzt nur den Teiler 2, die ungerade Zahl q kann verschiedene Teiler haben, aber keinesfalls die Zahl 2. Die Zweierpotenz und die Zahl q sind also teilerfremd. Ich verwende sie als Parameter u und v in den indischen Formeln.
Im obigen Beispiel ($K = 40$) heißt das:

$$u = 5 \qquad v = 4$$

Damit erhält man:

$$k = 25 - 16 = 9 \qquad K = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \qquad h = 25 + 16 = 41$$

Ein pp-Tripel mit Kathetenlänge 40 ist also das Tripel: $(9, 40, 41)$.
Auf diese Weise kann man zu jeder durch 4 teilbaren Zahl ein pp-Tripel finden.
Betrachten wir nun die Herleitung eines pp-Tripels für eine ungerade Kathetenlänge k. Zunächst bemerken wir, dass $k - 1$ eine gerade Zahl ist. Diese teilen wir durch 2:

$$p = \frac{k - 1}{2}$$

Zur Erstellung des pp-Tripels brauchen wir die p-te Dreieckszahl[3] Δ_p. Um zum Beispiel ein pp-Tripel für die Zahl 17 zu erhalten, berechne ich $p = 8$. Die achte Dreieckszahl ist die 36. Die Dreieckszahl nehme ich mit 4 mal. Für das Beispiel ergibt sich 144. Diesen Wert nehme ich für K und für h nehme ich den um 1 erhöhten Wert also 145. Bitte: $(17, 144, 145)$ ist ein pp-Tripel mit Kathetenlänge 17.

[3] Die Dreieckszahlen sind die Zahlen $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

Die „westindischen“ Formeln

Bei vorgegebener ungerade Kathete k ergibt sich der (unbewiesene) Satz:

> Sei $k > 1$ eine ungerade Zahl mit n unterschiedlichen Primteilern. Es existieren dann 2^{n-1} pp-Tripel mit k als ungerader Kathetenlänge.

Beispiele: Für die Kathetenlängen 3, 5, 7, 9, 11 und 13 (jeweils Primzahlen oder (da $9 = 3^2$) Potenz einer Primzahl) existiert jeweils ein pp-Tripel: $(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25)$, $(9, 40, 41)$, $(11, 60, 61), (13, 84, 85)$. 15 ist die kleinste ungerade Zahl mit zwei ungleichen Primteilern $15 = 3 \cdot 5$. Und man findet, wie es der obige Satz verspricht, tatsächlich zwei pp-Tripel für 15: $(15, 8, 17), (15, 112, 113)$.
Für die Primzahlen 17 und 19 stößt man auf jeweils ein pp-Tripel, für $21 = 3 \cdot 7$ wiederum auf zwei: $(21, 20, 29), (21, 220, 221)$.
Versuchen wir es mit $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Für diese Zahl gibt es die folgenden vier pp-Tripel: $(105, 88, 137), (105, 208, 233), (105, 608, 617)$ und $(105, 5512, 5513)$.
$1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ist die kleinste Zahl, die in acht pp-Tripeln als Kathetenlänge dienen kann.
Wie man bei diesen Beispielen sieht, existiert mindestens ein pp-Tripel, das wie im letzten Abschnitt beschrieben (also über die Verwendung von Dreieckszahlen), zusammengebaut wurde. Was passiert aber, wenn es weitere Tripel gibt?
Das Tripel $(15, 8, 17)$ lässt sich nicht über die Dreieckszahlen ermitteln. Mir fiel zunächst auf, dass für die Katheten gilt: $k = 15 = 3 \cdot 5$ und $K = 8 = 3 + 5$. Bei der Untersuchung eines weiteren pp-Tripels, nämlich $(21, 20, 29)$ ist der Zusammenhang aber nicht so einfach: Hier ist K nicht die Summe der Primfaktoren von k (aber immerhin ein Vielfaches davon).
Ich erweiterte meinen Ansatz:

$$K = \frac{p+q}{2} \cdot (p-q) = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$$

mit p und q als Primfaktoren von k. Aus der Formel wird ersichtlich, dass gelten muss $p > q$. Da nun $k = p \cdot q$ und K gegeben sind, kann man auch h über den Satz des Pythagoras berechnen:

$$h = \sqrt{p^2q^2 + \frac{1}{4}(p^2 - q^2)^2} = \sqrt{p^2q^2 + \frac{1}{4}(p^4 - 2p^2q^2 + q^4)} = \sqrt{\frac{1}{4}(p^4 + 2p^2q^2 + q^4)} = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

Man hat also:

$$k = p \cdot q \qquad K = \frac{1}{2}(p^2 - q^2) \qquad h = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

Die strukturelle Ähnlichkeit mit den indischen Formeln springt ins Auge. Da die Geschichte aber gezeigt hat, dass nicht alles „indische“, das man entdeckt, indisch ist, will ich die Formeln die *westindischen* Formeln nennen.
Wie bei den indischen Formeln ist zu spezifizieren, welche Werte die Grundparameter annehmen dürfen. Bei den indischen Formeln mussten u und v teilerfremd sein und durften nicht beide ungerade sein. Außerdem musste gelten: $u > v$. Für p und q in den westindischen Formeln gilt:

1. $p > q$
2. $p \cdot q = k$

3. p und q müssen teilerfremd sein

Aus (2) folgt, dass p und q ungerade Zahlen sind.
Man kann daher, möchte man nicht einen festen Wert für die Länge der ungeraden Kathete vorgeben, auch fordern:

1. $p > q$
2. p und q müssen ungerade sein
3. p und q müssen teilerfremd sein

Finde mit Hilfe der westindischen Formeln zu $k = 315$ alle pp-Tripel.

Eine Primzahlzerlegung ergibt: $k = 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Man kann dieses Produkt in sechs unterschiedliche Produkte mit zwei Faktoren unterteilen:

$$\begin{aligned}
315 &= 1 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 1 \cdot 315 \\
315 &= 3 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7) = 3 \cdot 105 \\
315 &= 5 \cdot (3^2 \cdot 7) = 5 \cdot 63 \\
315 &= 7 \cdot (3^2 \cdot 5) = 7 \cdot 45 \\
315 &= 3^2 \cdot (5 \cdot 7) = 9 \cdot 35 \\
315 &= (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 7) = 15 \cdot 21
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass zwei Aufgliederungen zu Faktoren führen, die nicht teilerfremd sind. Dies passiert, wenn die beiden Primfaktoren 3 auf unterschiedliche Faktoren verteilt werden, also in der zweiten und in der letzten Aufteilung[4]. Daher erhält man die p-q-Paare:

$$(315, 1) \qquad (63, 5) \qquad (45, 7) \qquad (35, 9)$$

Aus diesen ermittelt man nach den westindischen Formeln die pp-Tripel:

$$\begin{aligned}
(315, 1) &\longrightarrow (315, 49612, 49613) \\
(63, 5) &\longrightarrow (315, 1972, 1997) \\
(45, 7) &\longrightarrow (315, 988, 1037) \\
(35, 9) &\longrightarrow (315, 572, 653)
\end{aligned}$$

Zurück nach Indien

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass wir mit Hilfe des westindischen Formeln zu einem gegeben Kathetenwert k alle pp-Tripel finden kann.
Wenn man diesen Kniff erst einmal durchschaut hat, gelingt es auch, die indischen Formeln zu entschlüsseln[5]. Mit ihrer Hilfe kann man alle pp-Tripel zu einem gegebenen Kathetenwert K finden. Auch hier nutzt man eine Primzahlzerlegung.

1. Zerlege den Wert $\frac{K}{2}$ in Primfaktoren.

[4] Um nicht teilerfremde Faktoren zu vermeiden, könnte man auch mit der Zerlegung $315 = 5 \cdot 7 \cdot 9$ arbeiten.
[5] Wahrscheinlich hätte man da auch ohne westindische Formel drauf kommen können.

2. Kombiniere die Primfaktoren zu zwei Faktoren, deren Produkt $\frac{K}{2}$ ergibt. Vergiss nicht den Spezialfall $\frac{K}{2} = \frac{K}{2} \cdot 1$.
3. Streiche alle Produkte mit nicht teilerfremden Faktoren.
4. Verwende die Faktoren als u und v in den indischen Formeln.

Finde mit Hilfe der indischen Formeln zu $K = 360$ alle pp-Tripel.

Ich teile K durch 2 und führe eine Primzahlzerlegung durch:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Um nicht teilerfremde Faktoren gleich zu Beginn auszuschalten, berechne ich die Potenzen:

$$180 = 4 \cdot 9 \cdot 5$$

Ich setze die möglichen Produkte zusammen:

$$\begin{aligned} 180 &= (4 \cdot 9 \cdot 5) \cdot 1 = 180 \cdot 1 \\ 180 &= (9 \cdot 5) \cdot 4 = 45 \cdot 4 \\ 180 &= (4 \cdot 9) \cdot 5 = 36 \cdot 5 \\ 180 &= (4 \cdot 5) \cdot 9 = 20 \cdot 9 \end{aligned}$$

Dadurch ergeben sich die folgenden Parameterpaare:

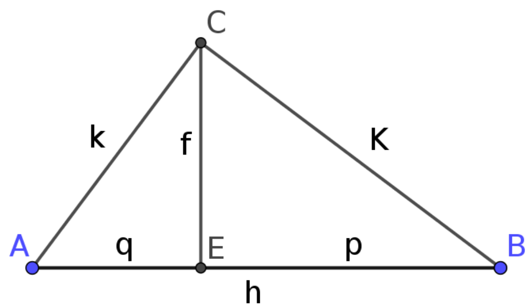
$$(180, 1) \qquad (45, 4) \qquad (36, 5) \qquad (20, 9)$$

Aus diesen ermittle ich nach den indischen Formeln die pp-Tripel:

$$\begin{aligned} (180, 1) &\longrightarrow (32399, 360, 32401) \\ (45, 4) &\longrightarrow (2009, 360, 2041) \\ (36, 5) &\longrightarrow (1271, 360, 1321) \\ (20, 9) &\longrightarrow (319, 360, 481) \end{aligned}$$

Der Griff nach dem superpythagoreischen Dreieck

Zeichnet man in ein rechtwinkliges Dreieck die Hypothenusenhöhe ein, so wird das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilt:



Die Höhe (in der Zeichnung mit f markiert) unterteilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte p und q. In Euklids Werk findet man den sogenannten *Höhensatz*. Er stellt den Bezug her zwischen den Hypotenusenabschnitten und der Höhe:

Das Produkt aus den Hypotenusenabschnitten entspricht dem Quadrat der Höhe:

$$f^2 = p \cdot q$$

Wie wäre es, wenn wir ein *superpythagoreisches Dreieck* fänden, in dem nicht nur die Katheten und die Hypotenuse, sondern auch die Hypotenusenabschnitte und die Höhe ganzzahlig sind? Keine Frage: Das wäre natürlich großartig.
Betrachtet man die obige Abbildung, kann man erkennen, dass man diese Aufgabe auch anders formulieren kann:

Finde zwei rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, die sich zu einem großen rechtwinkligen Dreieck zusammenbauen lassen, indem man sie an den Katheten zusammenlegt.

Leider kann man diese Aufgabe mit pp-Tripeln nicht lösen. Um das zu zeigen, wählen wir zwei pp-Tripel, die in einer Kathetenlänge übereinstimmen. Diese Kathetenlänge bildet dann die Höhe f, während die jeweils verbleibenden Katheten die Hypothenusenabschnitte des Großdreiecks (p und q) repräsentieren.
Wählen wir für f die ungeraden Kathetenlängen, so ist f ungerade und f^2 ist ebenfalls ungerade. In diesem Fall sind aber sowohl p als auch q gerade, womit das Produkt $p \cdot q$ ebenfalls gerade ist und damit nicht f^2 ergeben kann.
Auch die Möglichkeit, für f die geraden Kathetenlängen auszuwählen führt zum Widerspruch: f^2 ist dann ebenfalls gerade, das Produkt aus den ungeraden Hypotenusenabschnitten ist dagegen ungerade. Auch hier lässt sich keine Identität herstellen.
Wenn man ein bisschen überlegt, findet man heraus, das die beiden Teildreiecke ähnlich zueinander sein müssen. Man kann die Aufgabe oben also dadurch lösen, dass man geeignete Vielfache von pp-Tripeln nutzt, um ein superpythagoräisches Dreieck zusammen zu bauen. Die einfachste Möglichkeit ist ein Dreieck mit den Seitenlängen $(15, 20, 25)$. Dieses Dreieck weist die Hypotenusenabschnitte 9 und 16 auf und hat eine Höhe von 12.