Teilersummenfolgen

Man kann die Idee der *perfekten* Zahlen verallgemeinern. Man betrachte dazu für eine natürliche Zahl n die Teilersummenolge:

$$a_{i+1} = \begin{cases} T(a_i) & \text{falls } a_i > 1 \\ 1 & \text{falls } a_i = 1 \end{cases}$$

wobei wie im letzten Artikel $T(n)$ die Summe der echten Teiler von n bezeichnet. In der Mathematik sind Folgen nach obiger Konstruktion als „Inhaltsketten" bekannt, wobei – anders als oben – definiert wird: $T(1) = 0$.

Es ist klar, dass die perfekten Zahlen Teilersummenfolgen mit der Periodenlänge 1 erzeugen.

Die meisten anderen Zahlen (zumindest die „kleinen") induzieren Folgen, die gegen 1 konvergieren[1].

Ein drittes Verhalten erhält man für die Zahl 25, die unmittelbar auf den 1-Zyklus der perfekten Zahl 6 springt. Die vollständige Untersuchung der Zahlen bis 99 ergibt das in Abbildung 1 dargestellte Schema. Aus diesem wird ersichtlich, dass die untersuchten Zahlen bis auf vier Ausnahmen nach kurzen Folgen den Wert 1 annehmen. Zyklisches Verhalten zeigt sich für die beiden perfekten Zahlen 6 und 28. Das Verhalten der von 25 erzeugten Folge wurde bereits erwähnt. Schließlich existiert eine weitere nicht-triviale Folge mit $95, 25, \underline{6}$ [2]. Das sind dürftige Ergebnisse und möglicherweise ist es interessanter, zu bemerken, was nicht passiert:

1. Wir erhalten keine divergenten Folgen.
2. Es entstehen keine Zyklen höherer Periodizität.

Gibt es divergente, nicht-zyklische Teilersummenfolgen? Die Catalan-Dickson-Vermutung, nach der alle Folgen gegen einen Zyklus oder gegen 0 (im Kontext hier gegen 1) konvergieren, ist zur Zeit unbewiesen.

[1]Zum Teil nach einem größeren Ausflug, z.B.: 60,108,172,136,134,70,74,40,50,43,1

[2]Auch die Folgen mit den Startzahlen 119, 143, 417, 445, 565, 675, 685, 783, 909, 913, 1177, 1235, 1441, 1443, 1595, 1633, 1715, 1717 konvergieren gegen den 6er-Fixpunkt. Initialisiert man mit 608, 650, 652, 790, 1294, 1574 oder 1778, laufen die Folgen auf den Fixpunkt 496. Ich habe (außer der trivialen Folge $\underline{24}$) aber keine Folge gefunden, die gegen den Fixpunkt 24 konvergiert und vermute, dass es eine solche Folge nicht gibt.

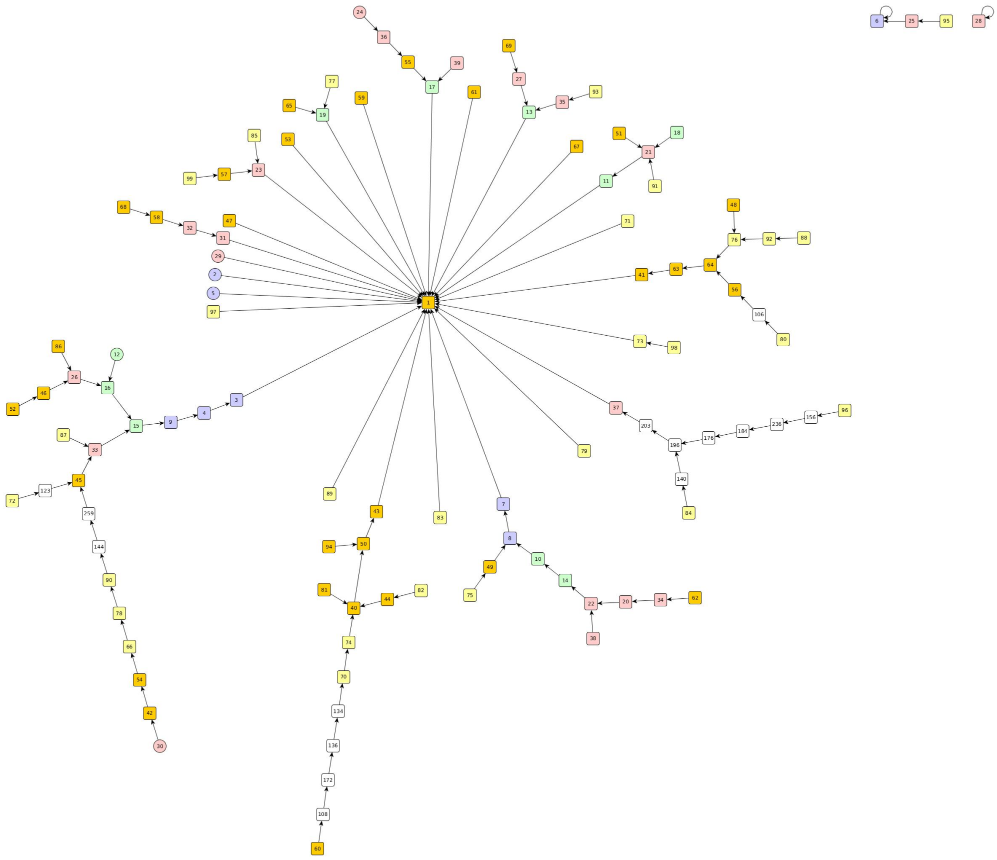

Abbildung 1: Teilersummenfolgen für die Zahlen 1 bis 99; Orphans mit rundem Symbol.

Eine Startzahl, die ein interessantes Verhalten auslösen könnte, schien mir 168 zu sein, das Produkt der beiden kleinsten perfekten Zahlen. In der Tat entfaltet sich eine lange Folge (abundante Zahlen fett):

168	**312**	**528**	**960**	**2 088**
3 762	**5 598**	**6 570**	**10 746**	**13 254**
13 830	**19 434**	**20 886**	**21 606**	**25 098**
26 742	**26 754**	**40 446**	**63 234**	**77 406**
110 754	**171 486**	**253 458**	**295 740**	**647 748**
1 077 612	**1 467 588**	**1 956 812**	2 109 796	1 889 486
953 914	668 966	353 578	**176 792**	**254 128**
308 832	**502 104**	**753 216**	**1 240 176**	**2 422 288**
2 697 920	3 727 264	3 655 076	2 760 844	**2 100 740**
2 310 856	**2 455 544**	**3 212 776**	3 751 064	3 282 196
2 723 020	3 035 684	**2 299 240**	**2 988 440**	**5 297 320**
8 325 080	**11 222 920**	**15 359 480**	**19 199 440**	28 875 608
25 266 172	**19 406 148**	**26 552 604**	**40 541 052**	**54 202 884**
72 270 540	**147 793 668**	**228 408 732**	**348 957 876**	508 132 204
404 465 636	303 708 376	**290 504 024**	312 058 216	294 959 384
290 622 016	286 081 174	151 737 434	**75 868 720**	108 199 856
101 437 396	76 247 552	76 099 654	42 387 146	21 679 318
12 752 594	7 278 382	3 660 794	1 855 066	**927 536**
932 464	**1 013 592**	**1 546 008**	**2 425 752**	**5 084 088**
8 436 192	13 709 064	20 563 656	33 082 104	57 142 536
...				

Allerdings ist das 174. Glied der Folge die Zahl 59, eine Primzahl. Damit konvergiert die vielversprechende Folge ebenfalls gegen 1.[3]

Bei den „langen“ Folgen zeigt sich, dass 528 häufig das „Ausfallstor“ ist. Die Folgen, die nicht nach einem guten Dutzend Iterationen 1 erreichen, durchlaufen diese Zahl. So zum Beispiel bei den Startwerten: 138, 150, 234,...Der weite Ausflug, den die Sequenz von 168 ausgehend nimmt, ist also innerhalb der Zahlen zwischen 100 und 200 außergewöhnlich, aber nicht einzigartig.

Eine interessante Folge stößt die Zahl 220 an: Sie induziert die alternierende Folge (220, 284)[5]. Weitere Untersuchungen zeigen, dass die durch 562 angeregte Folge unmittelbar auf diesen Zyklus springt.

Welche Zahlen bilden zyklische Teilersummenfolgen?

Eine weitere alternierende Folge bildet das Zahlenpaar (1184, 1210)[6]. Gegen dieses Paar konvergieren auch die Folgen:

[3] 2976 (das Produkt aus 6 und 496) induziert eine Folge, deren Glieder über 10^{13} steigen, aber auch diese Folge bricht (sogar etwas schneller) zusammen. Auch hier wird die Primzahl 59 durchlaufen[4].

[5] Historisch hat sich für Zahlenpaare, die eine alternierende Teilersummenfolge konstituieren, der Begriff „befreundete Zahlen“ eingebürgert. Siehe auch wikipedia unter diesem Stichwort.

[6] Das Zahlenpaar wurde – laut wikipedia – erst 1866 von Niccolò Paganini (nicht der Violinist) „entdeckt“.

$$1064, 1336, \underline{1184, 1210} \qquad 1308, 1772, 1336, \underline{1184, 1210}$$

$$1490, \underline{1210, 1184} \qquad 1690, 1604, \underline{1210, 1184}$$

$$1420, 1604, \underline{1210, 1184} \qquad 1816, 1604, \underline{1210, 1184}$$

bzw. $1898, \underline{1210, 1184}$. Ebenso alternieren $(2620, 2924)$. Zum Einzugsgebiet dieses Zyklus gehören (u.a.) 1188, 1692 und 2172. Auch die Folge $1380, 2652, 4404, 5900, 7120, 9620, 12724, 9550, 8306, 4156, 3124, \underline{2924, 2620}$ konvergiert gegen den Zyklus.

Zwei aufeinanderfolgende Zahlen, die beide eine nicht-triviale Konvergenz aufweisen sind $2581 \longrightarrow 6$ und $2582 \longrightarrow 496$.

PL	Zahlen	ggT	Entdecker
2	220, 284	4	Pythagoras ? / Thabit
2	1184, 1210	2	1860 (Paganini)
2	2620, 2924	4	1747 Euler
2	5020, 5564	4	1747 Euler
2	6232, 6368	8	1747 Euler
2	10744, 10856	8	1747 Euler
2	12285, 14595	105	1939 Brown
5	12496, 14288, 15472, 14536, 14264	8	1918 Poulet
28	14316, ... *siehe Abb. 2*	2	1918 Poulet
2	17296, 18416	16	ca. 1300 / 1636 Ibn-al-Banna / Fermat
2	63020, 76084	92	1747 Euler
2	66928, 66992	16	1747 Euler
2	67095, 71145	135	1747 Euler
2	69615, 87633	819	1747 Euler
2	79750, 88730	10	1964 Rolf
2	185368, 203432	8	1966 Alanen, Ore, Stempel
2	879712, 901424	16	1966 Alanen, Ore, Stempel

Tabelle 1: Die (echten) Zyklen mit Zahlen < 100000, sowie zwei weitere

Es zeigt sich, dass Teilersummenzyklen ähnlich selten sind, wie perfekte Zahlen (auch das sind ja Zyklen der Länge 1). Neben den in der Tabelle aufgeführten alternierenden Folgen[7] stößt man beim Durchforsten der Teilersummenfolgen der ersten 10000 Zahlen auf zwei weitere Zyklen:

Die Zahl 9464 gehört zum Einzugsgebiet des 5er-Zyklus: 12496 – 14288 – 15472 – 14536 – 14264.

Grandios ist ein Zyklus, gegen den die Folge mit Startzahl 2856 (oder auch 3360) konver-

[7] Bemerkenswert ist der Zyklus 12285, 14595 mit zwei ungeraden Teilnehmern (lässt das ahnen, dass es doch eine ungerade perfekte Zahl gibt?) und einem unanständig hohem ggT. Ähnlich die Paare (69615, 87633) und (67095, 71145).

giert. Er hat die Periodenlänge 28 und ist in Abbildung 2 dargestellt[8]. Lang (und bisher von mir nicht ausgelotet) sind die Folgen, die 276, 306 bzw. 396 auslösen[9].

Welchen Verlauf nimmt die Teilersummenfolge von 276? Die Frage ist offenbar noch ungelöst.

Bemerkenswert ist jedenfalls, dass es in der Teilersummenfolge von 276 aufeinanderfolgende Glieder gibt, die einen extrem geringen relativen Unterschied aufweisen.

Unmögliche Teilersummen

Es ist ebenfalls wert zu untersuchen, welche Zahlen als Teilersummen nicht auftreten. Ich nenne diese Zahlen *Orphans*.

> Die kleinsten Orphans sind:
>
> $$2, 5, 12, 24, 29, 30$$
>
> 18 ist übrigens kein Orphan (Die Teilersumme von 289 ist 18), wodurch die Annahme widerlegt wird, alle Vielfache der perfekten Zahl 6 könnten Orphans sein.
>
> Auch 56 (das Doppelte der perfekten 28) ist kein Orphan (Teilersumme von 106 ist 56).
>
> Die Zahl 38 kommt als Orphan in Frage. Zu untersuchen wären dafür alle Folgen der Zahlen bis $19^2 = 361$.

Die gerade zitierte Überlegung war vorschnell. Ich hatte übersehen, dass einige der genannten Kandidaten in den Folgen von Quadraten von Primzahlen direkt auf diese folgen. So erhält man $11^2 = 121, 12, 16, 15, \ldots$, bzw. $23^2 = 529, 24, 36, 55, 17, 1$ oder $29^2 = 841, 30, 42, 54, \ldots$. Die unmittelbaren Nachfolger von Primzahlen können also keine Orphans sein. Anders liegt der Fall bei der 29. Sie folgt unmittelbar auf 115 oder auch auf 187.

Nachdem so sukzessive fast alle der obigen Kandidaten ausgeschaltet wurden, stellt sich die Frage, ob 2 und 5 zu halten sind. Bei 2 ist die Sache klar, denn 1 ist in jedem Fall Summand der Teilersumme und dieser müsste durch eine weitere 1 zu 2 ergänzt werden, was nach Konstruktion der Teilersumme (keine Teiler mehrfach) unmöglich ist.

Ähnlich für die 5. Mit den nicht-trivialen Teilern (den Teilern ungleich 1) müsste sich hier die Summe 4 bilden lassen. Grundsätzlich wäre dies möglich durch eine einzelne 4, dann käme aber auf jeden Fall die 2 als weiterer Teiler hinzu und die Teilersumme würde 5 überschreiten. Versucht man die Summation mit mehreren Summanden, gelangt man ohne Doppelung (von 1 oder 2) nicht auf die geforderte Summe von 4.

Damit sind 2 und 5 echte Orphans.

Ich vermute, dass es keine weiteren Orphans gibt . Die Zahlen, die bei der sukzessiven

Gibt es außer 2 und 5 Zahlen, die nicht Teilersumme einer anderen Zahl sind?

[8] Zahlen, die zu Zyklen gehören, deren Periodenlänge größer als 2 ist, werden „gesellige Zahlen“ genannt. Eine Liste bekannter Zyklen findet man unter: ://djm.cc/sociable.txt.

[9] „Die ersten sechs offenen (nicht vollständig berechneten) Ketten im Intervall [1, 1000] wurden nach dem Ehepaar Derrick Lehmer und Emma Lehmer Lehmer-Six genannt. Ihre Startzahlen waren 276, 552, 564, 660, 840 und 966.“ (wikipedia: Inhaltsketten)

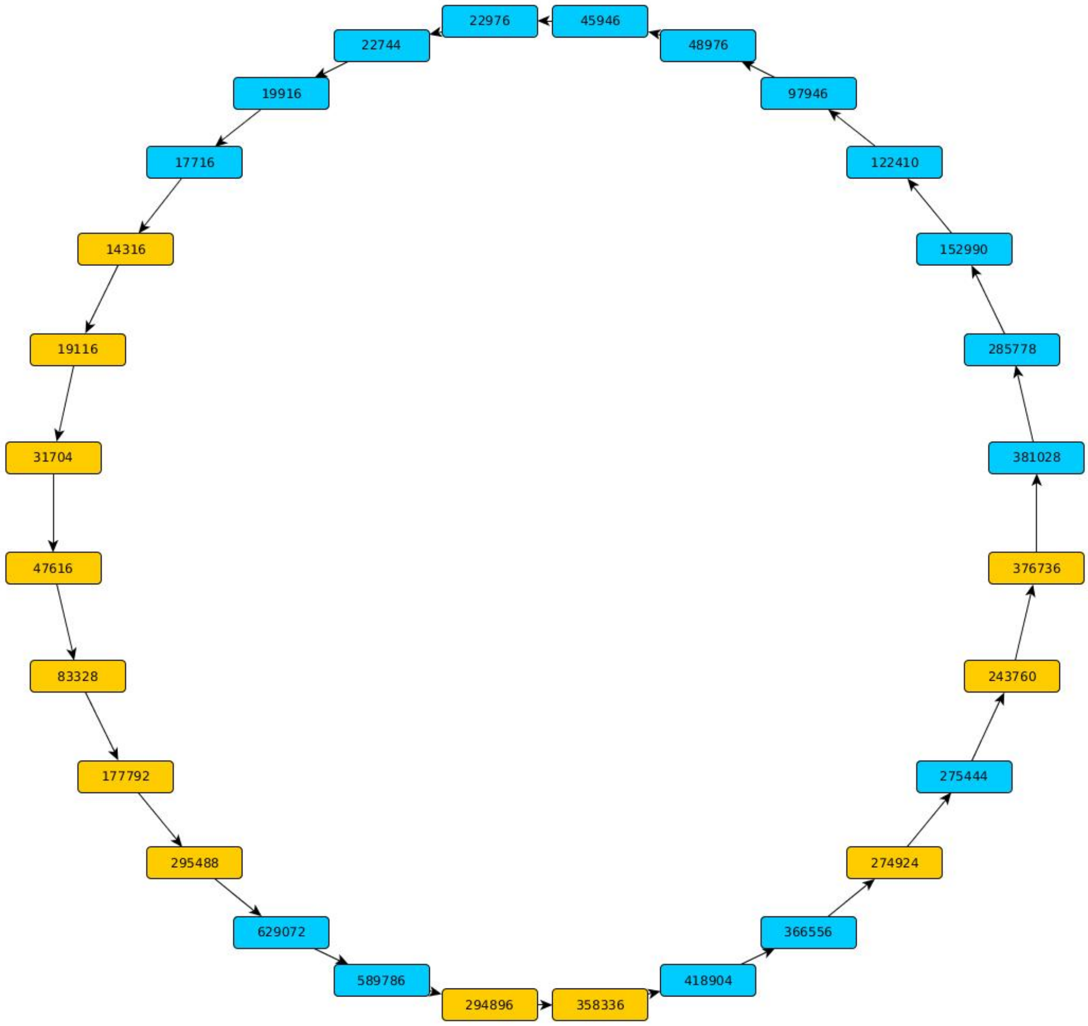

Abbildung 2: Zyklus mit Periodenlänge 28 (defiziente Zahlen blau, abundante Zahlen orange)

Durchforschung der Teilersummenfolgen lange in keiner Folge auftauchen (z.B. 30 oder 60), sind Nachfolger von Primzahlen und finden sich daher in den Teilersummenfolgen deren Quadrate.

Orphans unter 100: $1, 2, 5, (28), 52, 88, 96$

Einzugsgebiete

Oben haben wir bereits festgestellt, dass 28 die einzige Zahl mit Teilersumme 28 ist. Das Einzugsgebiet des entsprechenden 1er-Zyklus ist also minimal. Im Gegensatz dazu stößt man beim Durchsuchen der Teilersummenfolgen immer wieder auf neue Folgen, die gegen 6 konvergieren. Ich vermute, das Einzugsgebiet der 6 ist unendlich groß. Wiederum andersartig ist das Einzugsgebiet der perfekten Zahl 496. In ihm liegen die Zahlen: 608, 650, 652, 790, 1294, 1574, 1778, 2162, 2582, 3142 und 5158. Weitere Werte scheint es nicht zu geben. Sollte dies so sein, wären die Zahlen 608, 1778, 2162, 3142 und 5158

Gibt es unendlich viele Startwerte, die gegen 6 konvergieren?

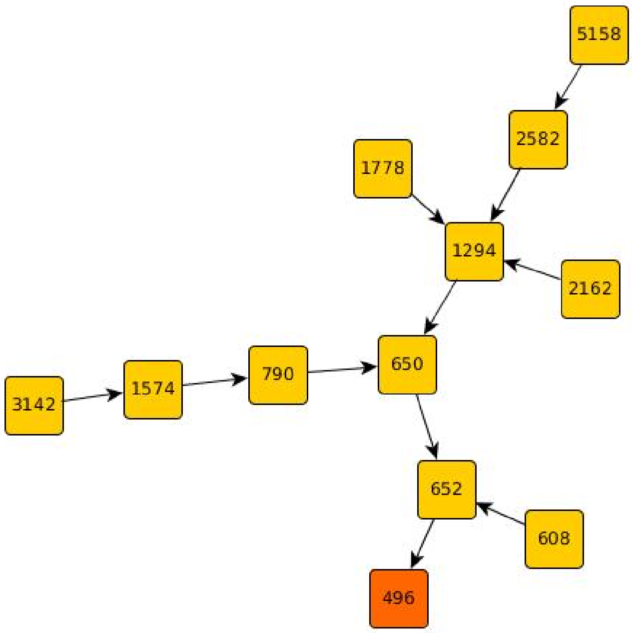

Abbildung 3: Das (vollständige ?) Einzugsgebiet der perfekten Zahl 496

Orphans.

Noch schmächtiger ist das Einzugsgebiet des alternierenden Zyklus 220, 284. Zu ihm gehört nur die 562 (Orphan ?).

Weblinks

http://www.aliquot.de/aliquot.htm17490